ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ.
РЯДЫ ФУРЬЕ

Разложение в ряд Фурье функций с периодом 2π.
Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Разложение в ряд Фурье функций с периодом 2π

Пусть $f(x)$ – функция периода 2π, определенная на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Рядом Фурье этой функции является тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (36.1)$$

- Коэффициенты данного ряда вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad (36.2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Теорема 36.1.

Если функция $f(x)$ представима в виде суммы тригонометрического ряда (36.1), равномерно сходящемся для всех x, то коэффициенты a_n и b_n являются коэффициентами Фурье (36.2) функции $f(x)$.

Разложение чётной функции

Если функция $f(x)$ четная, то ее ряд Фурье содержит только свободный член $\frac{a_0}{2}$ и косинусы, так как $b_n = 0$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx.$

Разложение нечётной функции

Если функция $f(x)$ нечетная, то ее ряд Фурье содержит только синусы, так как $a_n = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[0; l]$. Тогда для разложения функции в ряд Фурье достаточно доопределить ее на отрезке $[-l; 0]$ произвольным образом, а затем разложить в ряд Фурье, считая ее заданной на отрезке $[-l; l]$.

Наиболее целесообразно функцию $f(x)$ доопределить таким образом, чтобы ее значения в точках отрезка $[-l; 0]$ находились из условия $f(x) = f(-x)$ или

$$f(x) = -f(-x).$$

Тогда в первом случае функция на отрезке $[-l; l]$ будет четной, а во втором – нечетной.

При этом коэффициенты разложения a_n в первом случае и b_n во втором случае можно найти по формулам:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$