ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИИЕ РЯДЫ.

РЯДЫ ФУРЬЕ

Разложение в ряд Фурье функций с периодом 2π.

Разложение в ряд Фурье непериодических функций.

Ряд Фурье в комплексной форме

Пусть функция $f(x)$ периода 2π определена на отрезке $[-\pi;\pi]$. Тогда рядом Фурье этой функции является тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \qquad (36.1)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx. \qquad (36.2)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 36.1. Если функция $f(x)$ представима в виде суммы тригонометрического ряда (36.1), равномерно сходящемся для всех *x*, то коэффициенты a_n и b_n являются коэффициентами Фурье (36.2) функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ является четной, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

где $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx.$

Если же функция $f(x)$ нечетная, то она раскладывается в ряд Фурье по синусам:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

где $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx.$

Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[0; l]$. Тогда для разложения функции в ряд Фурье достаточно доопределить ее на отрезке $[-l; 0]$ произвольным образом, а затем разложить в ряд Фурье, считая ее заданной на отрезке $[-l; l]$. Наиболее целесообразно функцию $f(x)$ доопределить таким образом, чтобы ее значения в точках отрезка $[-l; 0]$ находились из условия $f(x) = f(-x)$ или $f(x) = -f(-x)$. Тогда в первом случае функция на отрезке $[-l; l]$ будет четной, а во втором – нечетной. При этом коэффициенты разложения a_n в первом случае и b_n во втором случае можно найти по формулам:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$

Ряд Фурье в комплексной форме

Пусть функция $f(x)$ периода 2π представима в виде суммы тригонометрического ряда (36.1): $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$

где a_n и b_n – коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Используя комплексные числа и формулы Эйлера

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i},$$

можно придать ряду Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ следующий вид:

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx =$$

$$= a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \frac{1}{2}\left(e^{inx}\left(a_n - ib_n\right) + e^{-inx}\left(a_n + ib_n\right)\right).$$

Обозначив $a_n - ib_n = c_n$, и, используя формулы (36.2) для нахождения коэффициентов a_n и b_n, получим формулу:

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx. \qquad (36.3)$$

Комплексное число $a_n + ib_n = \bar{c}_n$ является сопряженным к c_n. Формулу для $\bar{c}_n$ можно получить из формулы (36.3) для c_n, заменяя n на $-n$:

$$\bar{c}_n = c_{-n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx.$$

Так как коэффициент c_0 можно найти из (36.3) при $n = 0$, то будем считать $a_0 = c_0$.

Тогда ряд (36.1) можно переписать в виде

$$\frac{c_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad (36.4)$$

где $c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$

Определение 36.1. Говорят, что ряд (36.4) сходится для данного значения x, если существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=-k}^{k} c_n e^{inx} = \lim\limits_{k\to\infty} S_k(x).$

Такая сходимость называется ***сходимостью в смысле главного значения***.

Замечание. При нахождении c_n необходимо помнить, что $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = \cos n\pi = (-1)^n$.

Комплексную форму ряда Фурье функции $f(x)$ можно записать для любого отрезка $[-l; l]$:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x},$$

где $c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\omega_n x}dx, \quad \omega_n = \frac{\pi n}{l}.$

В электротехнике члены ряда $c_n e^{i\omega_n x}$ называются ***гармониками***, коэффициенты c_n – ***комплексными амплитудами*** гармоник, а числа ω_n – ***волновыми числами*** функции $f(x)$.