ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ.
РЯДЫ ФУРЬЕ

Основные понятия. Разложение в ряд Фурье функций с периодом $2l$

Определение периодической функции

Функция $f(x)$, определенная на некотором множестве D, называется ***периодической с периодом*** $T>0$, если для любого $x \in D$ выполняется равенство

$$f(x+T) = f(x).$$

- Простейшими периодическими функциями являются *тригонометрические* функции

  $\cos x$ и $\sin x$ $(T = 2\pi)$,

  tgx и $ctgx$ $(T = \pi)$.

- Простейшим периодическим процессом является *гармоническое колебание*, описываемое функцией периода $2l$

$$y = A\cos\left(\frac{n\pi}{l}t + \omega\right),$$

где A – амплитуда колебания; n – частота; ω – начальная фаза.

Определение тригонометрического ряда

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi}{l}x+b_1\sin\frac{\pi}{l}x+a_2\cos\frac{2\pi}{l}x+b_2\sin\frac{2\pi}{l}x+\ldots+$$

$$+a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x+\ldots=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

(35.1)

Числа a_n и b_n называются ***коэффициентами тригонометрического ряда*** (35.1), а его отдельные слагаемые

$$a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

называются ***членами ряда*** (35.1) или его ***гармониками***, соответствующими частоте n.

Рассмотрим числовой ряд $\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right)$ (35.2)

Так как
$$\left|a_n\cos\frac{n\pi}{l}x\right|\le|a_n|,\quad \left|b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right|\le|b_n|,$$

то если сходится ряд (35.2), то ряд (35.1) сходится абсолютно и равномерно для всех x. Из равномерной сходимости ряда следует, что если его члены являются непрерывными функциями периода $2l$, то и его сумма

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

есть непрерывная функция периода $2l$ и ряд (5.1) можно почленно интегрировать.

Разложение в ряд Фурье функций с периодом $2l$
Определение ряда Фурье

Пусть $f(x)$ – $2l$-периодическая функция.

Рядом Фурье этой функции называется тригонометрический ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

где a_n и b_n – ***коэффициенты Фурье***.

Коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, \qquad (35.3)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$

Достаточный признак сходимости

Теорема 35.1.

Если функция $f(x)$ периода $2l$ непрерывна на всей действительной оси и имеет кусочно-непрерывную производную, то ее ряд Фурье равномерно сходится к ней:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Признак сходимости Дирихле

Теорема 35.2.

Если функция $f(x)$ периода $2l$ на отрезке $[-l;l]$ имеет конечное число точек экстремума и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва I рода, то ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке отрезка $[-l;l]$, а сумма $S(x)$ этого ряда:

1. $S(x)=f(x)$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, лежащих внутри отрезка $[-l;l]$;

2. $$S(x_0)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0-0} f(x)+\lim_{x\to x_0+0} f(x)\right),$$

где x_0 – точка разрыва I рода $f(x)$;

3. $$S(x)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to -l+0} f(x)+\lim_{x\to l-0} f(x)\right)$$

на концах отрезка $[-l;l]$.

Признак Дирихле не является необходимым признаком.

- При нахождении коэффициентов Фурье часто применяется формула интегрирования по частям в определенном интеграле:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

- На основании этой формулы

$$\int_a^b x\cos kx\,dx = \frac{x}{k}\sin kx\Big|_a^b + \frac{1}{k^2}\cos kx\Big|_a^b,$$

$$\int_a^b x\sin kx\,dx = -\frac{x}{k}\cos kx\Big|_a^b + \frac{1}{k^2}\sin kx\Big|_a^b.$$

- Также необходимо помнить, что

$$\cos n\pi = (-1)^n, \qquad \sin n\pi = 0.$$

Разложение чётной функции

Если функция $f(x)$ четная, то ее ряд Фурье содержит только свободный член $\frac{a_0}{2}$ и косинусы, так как $b_n = 0$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l} x,$$

где $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l} xdx.$

Разложение нечётной функции

Если функция $f(x)$ нечетная, то ее ряд Фурье содержит только синусы, так как $a_n = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$