ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИИЕ РЯДЫ.

РЯДЫ ФУРЬЕ

Основные понятия.

Разложение в ряд Фурье функций с периодом $2l$

При решении ряда прикладных задач появляется необходимость описания периодических процессов с помощью периодических функций.

Определение 35.1. Функция $f(x)$, определенная на некотором множестве D, называется ***периодической с периодом*** $T>0$, если для любого $x \in D$ выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$.

Простейшими периодическими функциями являются тригонометрические функции $\cos x$ и $\sin x$ $(T=2\pi)$, tgx и $ctgx\,(T=\pi)$.

Простейшим периодическим процессом является гармоническое колебание, описываемое функцией периода $2l$

$$y = A\cos\left(\frac{n\pi}{l}t+\omega\right),$$

где A – амплитуда колебания; n – частота; ω – начальная фаза.

Отметим, что функция $\quad a_n\cos\frac{n\pi}{l}t + b_n\sin\frac{n\pi}{l}t$,

где $a_n^2+b_n^2 \neq 0$ $(n \in N)$, определяет гармоническое колебание, потому что

$$a_n\cos\frac{n\pi}{l}t + b_n\sin\frac{n\pi}{l}t = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos\frac{n\pi}{l}t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin\frac{n\pi}{l}t\right) =$$

$= A_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}t+\omega_n\right)$, где $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, а ω_n определяется однозначно из

соотношений $\quad 0 \le \omega_n < 2\pi, \quad \dfrac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} = \cos\omega_n, \quad \dfrac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} = \sin\omega_n$.

Определение 35.2. Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi}{l}x+b_1\sin\frac{\pi}{l}x+a_2\cos\frac{2\pi}{l}x+b_2\sin\frac{2\pi}{l}x+\ldots+$$

$$+a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x+\ldots=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (35.1)$$

называется ***тригонометрическим рядом***. Числа a_n и b_n называются ***коэффициентами тригонометрического ряда*** (35.1), а его отдельные слагаемые

$$a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

называются ***членами ряда*** (35.1) или его ***гармониками***, соответствующими частоте n.

Для выяснения сходимости тригонометрического ряда (35.1) рассмотрим числовой ряд

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right), \qquad (35.2)$$

который является мажорирующим для ряда (35.1). Так как справедливы неравенства

$$\left|a_n\cos\frac{n\pi}{l}x\right|\le|a_n|, \quad \left|b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right|\le|b_n|,$$

то если сходится ряд (35.2), то ряд (35.1) сходится абсолютно и равномерно для всех x. Из равномерной сходимости ряда следует, что если его члены являются непрерывными функциями периода $2l$, то и его сумма

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

есть непрерывная функция периода $2l$ и ряд (35.1) можно почленно интегрировать.

Разложение в ряд Фурье функций с периодом $2l$

Пусть задана функция $f(x)$ периода $2l$ и известно, что ее можно разложить в тригонометрический ряд (35.1):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Если коэффициенты a_n и b_n тригонометрического ряда, представляющего периодическую функцию периода $2l$, вычисляются по формулам

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,\qquad(35.3)$$

то a_n и b_n называются ***коэффициентами Фурье*** функции $f(x)$.

Определение 35.3. Тригонометрический ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

с коэффициентами Фурье a_n и b_n называется ***рядом Фурье*** периодической функции $f(x)$ периода $2l$.

Тот факт, что ряд является рядом Фурье функции $f(x)$, будем записывать следующим образом: $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$.

Условия, которым должна удовлетворять функция, чтобы ее ряд Фурье сходился к ней, и чтобы сумма этого ряда равнялась значениям данной функции в соответствующих точках, описываются в следующих теоремах.

Теорема 35.1. (***Достаточный признак сходимости***) Если функция $f(x)$ периода $2l$ непрерывна на всей действительной оси и имеет кусочно-непрерывную производную, то ее ряд Фурье равномерно сходится к ней:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Теорема 35.2. (***Признак сходимости Дирихле***) Если функция $f(x)$ периода $2l$ на отрезке $[-l;l]$ имеет конечное число точек экстремума и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва I рода, то ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке отрезка $[-l; l]$, а сумма $S(x)$ этого ряда:

1. $S(x) = f(x)$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, лежащих внутри отрезка $[-l; l]$;

2. $S(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) + \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)\right)$, где x_0 – точка разрыва I рода $f(x)$;

3. $S(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to -l + 0} f(x) + \lim_{x \to l - 0} f(x)\right)$ на концах отрезка $[-l; l]$.

Признак сходимости Дирихле является лишь достаточным условием разложимости функции в ряд Фурье: существуют функции, которые не удовлетворяют условиям Дирихле, но при этом могут быть разложены в ряд Фурье.

Замечание. При нахождении коэффициентов Фурье очень часто применяется формула интегрирования по частям в определенном интеграле:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

На основании этой формулы

$$\int_a^b x \cos kx dx = \frac{x}{k}\sin kx\Big|_a^b + \frac{1}{k^2}\cos kx\Big|_a^b ,$$

$$\int_a^b x \sin kx dx = -\frac{x}{k}\cos kx\Big|_a^b + \frac{1}{k^2}\sin kx\Big|_a^b .$$

Также при нахождении коэффициентов Фурье необходимо помнить, что $\cos n\pi = (-1)^n$, $\sin n\pi = 0$.

В случае, когда функция $f(x)$ является четной, ее ряд Фурье содержит только свободный член $\frac{a_0}{2}$ и косинусы, так как $b_n = 0$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x, \quad \text{где} \quad a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, \ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx.$$

Соответственно для нечетной функции $f(x)$ $a_n = 0$ и ее ряд Фурье содержит только синусы:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad \text{где} \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

Данные разложения легко получить, если при нахождении коэффициентов Фурье (35.3) воспользоваться тем, что произведение двух четных и двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной функции на нечетную есть нечетная функция.