ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Ряды Тейлора и Маклорена.

Применение степенных рядов для вычисления интегралов и решения дифференциальных уравнений

Предположим, что функция $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и ее можно представить в виде суммы степенного ряда

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, сходящемся в каком-нибудь интервале, содержащем точку x_0:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – коэффициенты, подлежащие определению.

Пользуясь свойствами степенных рядов, найдем эти коэффициенты по известным значениям функции $f(x)$ и ее производных в точке x_0. Положив $x = x_0$, получим, что

$$f(x_0) = a_0 .$$

Дифференцируя степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

и полагая $x = x_0$, найдем коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и подставив их в исходное разложение получим ряд:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (34.1)$$

который называется ***рядом Тейлора*** функции $f(x)$.

- ***Если функцию*** $f(x)$ ***можно разложить в степенной ряд по степеням*** $(x - x_0)$***, то этот ряд будет являться рядом Тейлора данной функции***.

- Пусть

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n ,$$

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ – ***остаточный член ряда Тейлора***.

- Сходимость ряда Тейлора к функции $f(x)$ в точке x означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Величина $R_n(x)$ дает ошибку, которая получается при замене функции $f(x)$ многочленом $P_n(x)$.

<u>Теорема о структуре остаточного члена</u>

Теорема 4.1. Пусть функция $f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда остаточный член $R_n(x)$ для любой точки этой окрестности имеет вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad , \qquad (34.2)$$

где ξ заключено между x и x_0.

Остаточный член (4.2) называется ***остаточным членом в форме Лагранжа***.

Достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора

Теорема 34.2. Если в некоторой окрестности точки x_0 абсолютные величины всех производных функции $f(x)$ ограничены одним и тем же числом M, то функция $f(x)$ в этой окрестности разлагается в ряд Тейлора.

Определение ряда Маклорена

Рядом Маклорена называется разложение функции $f(x)$ в ряд по степеням x:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (34.3)$$

получаемое из ряда Тейлора (34.1) при $x_0=0$.

Разложение некоторых функций в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{34.4}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{34.5}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \tag{34.6}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

(34.7)

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

(34.8)

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

(34.9)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{34.10}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \tag{34.11}$$

Области сходимости рассмотренных рядов

- ряды (34.4)-(34.6) сходятся при $x \in (-\infty; +\infty)$;
- ряд (34.7) – при $x \in (-1; 1]$;
- ряд (34.8) – при $x \in [-1; 1]$;
- разложение (34.9) имеет место в следующих четырех случаях:

1) $m \in Z_+ : \ x \in (-\infty; +\infty)$; 2) $m \geq 0 : \ x \in [-1; 1]$;

3) $-1 < m < 0 : \ x \in (-1; 1]$; 4) $m \leq -1 : \ x \in (-1; 1)$;

- ряды (34.10), (34.11) сходятся при $x \in (-1; 1)$ как частные случаи ряда (34.9) при $m = -1$.

Вычисление интегралов

Существуют элементарные функции, интегралы от которых не могут быть выражены через конечное число элементарных функций. В этом случае, если подынтегральную функцию можно

разложить в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

то при вычислении заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда.

Решение дифференциальных уравнений

Требуется найти решение дифференциального уравнения 2-го порядка: $y'' = f\left(x;\, y;\, y'\right)$,

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y\left(x_0\right) = y_0, \quad y'\left(x_0\right) = y' \;.$$

Пусть решение $y = y\left(x\right)$ существует и может быть представлено в виде ряда Тейлора:

$$y = y\left(x\right) = y\left(x_0\right) + y'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + \frac{y''\left(x_0\right)}{2!}\left(x - x_0\right)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{y^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x - x_0\right)^n + \ldots,$$

где $y^{(n)}\left(x_0\right)$ $\left(n = \overline{0, \infty}\right)$ подлежат определению.

Из начальных условий и уравнения следует, что

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\quad y''(x_0)=f(x_0;y_0;y_0')=y_0''.$$

Дифференцируя обе части исходного уравнения по x и подставляя в правую часть $x=x_0$, получим

$$y'''(x_0)=y_0'''.$$

Дифференцируя еще раз, найдем $y^{(4)}(x_0)=y_0^{(4)}$.

Продолжая процесс далее и подставляя найденные значения производных в ряд Тейлора

$$y=y_0+\frac{y_0'}{1!}(x-x_0)+\frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y_0^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

получим решение уравнения для тех значений x, для которых данный ряд сходится.