ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Ряды Тейлора и Маклорена.

Применение степенных рядов для вычисления интегралов и решения дифференциальных уравнений

Предположим, что функция $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и ее можно представить в виде суммы степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, сходящемся в каком-нибудь интервале, содержащем точку x_0:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n ,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – коэффициенты, подлежащие определению.

Пользуясь свойствами степенных рядов, найдем эти коэффициенты по известным значениям функции $f(x)$ и ее производных в точке x_0. Положив $x = x_0$, получим, что $f(x_0) = a_0$.

Продифференцировав степенной ряд

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \ldots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \ldots$$

и снова положив $x = x_0$, будем иметь $f'(x_0) = a_1$.

При следующем дифференцировании получим

$$f''(x) = 2a_2 + \ldots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} + \ldots,$$

откуда при $x = x_0$ $f''(x_0) = 2a_2$ или $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$ (2! написано вместо 2 для единообразия).

После n-кратного дифференцирования получим

$$f^{(n)}(x) = n! \cdot a_n + \ldots,$$

где остальные слагаемые содержат множитель $(x-x_0)$, и, следовательно, при $x = x_0$ обращаются в нуль: $f^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n$ или $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Подставляя найденные таким образом коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ в исходное разложение получим ряд

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \qquad (34.1)$$

который называется ***рядом Тейлора*** функции $f(x)$.

Таким образом, показали, что ***если функцию $f(x)$ можно разложить в степенной ряд по степеням $(x - x_0)$, то этот ряд будет являться рядом Тейлора данной функции***. Последнее утверждение справедливо лишь в предположении, что функция $f(x)$ может быть разложена в степенной ряд.

Выясним условия, при которых можно утверждать, что ряд Тейлора (4.1), составленный для функции $f(x)$, действительно сходится в некотором интервале и его сумма в точности равна $f(x)$.

Обозначим через $P_n(x)$ многочлен n-й степени, представляющий n-ю частичную сумму ряда Тейлора:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

через $R_n(x)$ – ***остаточный член ряда Тейлора***: $\quad R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Сходимость ряда Тейлора к функции $f(x)$ в точке x означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$. Причем, величина $R_n(x)$ дает ошибку, которая получается при замене функции $f(x)$ многочленом $P_n(x)$.

Запишем теперь функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x).$$

Теорема 34.1. (***О структуре остаточного члена***) Пусть функция $f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда остаточный член $R_n(x)$ для любой точки этой окрестности имеет вид

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (34.2)$$

где ξ заключено между x_0 и x.

Замечание. Остаточный член (34.2) называется ***остаточным членом в форме Лагранжа***.

Выражение (34.2) для остаточного члена не дает возможности вычислить его величину из-за неопределенности точки ξ, в которой берется $(n+1)$-я производная. Поэтому на практике удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема 34.2. (***Достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора***) Если в некоторой окрестности точки x_0 абсолютные величины всех производных функции $f(x)$ ограничены одним и тем же числом M, то функция $f(x)$ в этой окрестности разлагается в ряд Тейлора.

Определение 34.1. ***Рядом Маклорена*** называется разложение функции $f(x)$ в ряд по степеням x:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \qquad (34.3)$$

получаемое из ряда Тейлора (4.1) при $x_0=0$.

Приведем разложение некоторых функций в ряд Маклорена:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (34.4)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (34.5)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad (34.6)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \qquad (34.7)$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (34.8)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \tag{34.9}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{34.10}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \tag{34.11}$$

Области сходимости рассмотренных рядов:

а) ряды (34.4)-(34.6) сходятся при $x \in (-\infty; +\infty)$;

б) ряд (34.7) – при $x \in (-1; 1]$;

в) ряд (34.8) – при $x \in [-1; 1]$;

г) разложение (34.9) имеет место в следующих четырех случаях:

1) $m \in Z_+ :\ x \in (-\infty; +\infty)$; 2) $m \geq 0 :\ x \in [-1; 1]$;

3) $-1 < m < 0 :\ x \in (-1; 1]$; 4) $m \leq -1 :\ x \in (-1; 1)$;

д) ряды (34.10), (34.11) сходятся при $x \in (-1; 1)$ как частные случаи ряда (34.9) при $m = -1$.

Как известно, существуют элементарные функции, интегралы от которых не могут быть выражены через конечное число элементарных функций: $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$, $\int e^{-x^2} dx$ и т.д. В этом случае, если подынтегральную функцию можно разложить в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то при вычислении заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда.

В ряде случаев, когда интегрирование дифференциального уравнения в элементарных функциях невозможно, приближенное решение такого уравнения можно найти в виде ряда Тейлора.

Пусть, например, требуется найти решение дифференциального уравнения 2-го порядка: $y'' = f(x; y; y')$,

удовлетворяющее начальным условиям: $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$.

Пусть решение $y = y(x)$ существует и может быть представлено в виде ряда Тейлора:

$$y = y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$ где $y^{(n)}(x_0)$ $\left(n = \overline{0, \infty}\right)$ подлежат определению.

Из начальных условий и уравнения следует, что

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \qquad y''(x_0) = f(x_0; y_0; y'_0) = y''_0.$$

Дифференцируя обе части исходного уравнения по x и подставляя в правую часть $x = x_0$, получим $y'''(x_0) = y'''_0$. Дифференцируя еще раз, найдем $y^{(4)}(x_0) = y_0^{(4)}$. Продолжая процесс далее и подставляя найденные значения производных в ряд Тейлора

$$y = y_0 + \frac{y'_0}{1!}(x - x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n,$$

получим решение уравнения для тех значений x, для которых данный ряд сходится.

Если дифференциальное уравнение является линейным, то коэффициенты разложения частного решения удобнее искать методом неопределенных коэффициентов. Для этого подставляют ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ в дифференциальное уравнение и приравнивают коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x в разных частях уравнения.