Лекция 3

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Основные понятия.
Степенные ряды

Определение функционального ряда

Функциональным рядом

называется ряд вида

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \quad ,(33.1)$$

члены которого $u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,u_n(x),\ \ldots$

являются функциями от x.

Определение области сходимости

Область сходимости функционального ряда – совокупность значений x, при которых функции $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ определены и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится.

Точка $x = x_0$ – ***точка сходимости*** данного ряда.

- Область сходимости функционального ряда – какой-нибудь промежуток оси Ox.

Равномерная сходимость ряда

- В области сходимости ряда его сумма – некоторая функция от x, определенная в области сходимости ряда:

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \quad .$$

- $S_n(x)$ – сумма первых членов ряда,

  $R_n(x)$ – остаток ряда.

  Для сходящегося ряда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \quad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Сходящийся функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется ***равномерно сходящимся*** в некоторой области X, если для

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) : \ \forall n > N(\varepsilon)$$

выполняется неравенство $\left|R_n(x)\right| < \varepsilon \quad \forall x \in X.$

При этом сумма $S(x)$ равномерно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в области X, где $u_n(x)$ – непрерывные функции, есть непрерывная функция.

Достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда Вейерштрасса

Теорема 33.1.
Если функции $u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots$ по абсолютной величине не превосходят в некоторой области X положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$:

$$|u_1(x)| \le a_1,\ |u_2(x)| \le a_2,\ \ldots, |u_n(x)| \le a_n, \ldots ,\quad (33.2)$$

причем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то

функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в области X сходится равномерно.

Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

1°. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_n(x)$ – непрерывные функции, равномерно сходится в некоторой области X и имеет сумму $S(x)$, то ряд

$$\int\limits_a^b u_1(x)dx + \int\limits_a^b u_2(x)dx + \ldots + \int\limits_a^b u_n(x)dx + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx$$

сходится и имеет сумму $\int\limits_a^b S(x)dx$.

Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

2°. Пусть функции $u_n(x)$ определены в некоторой области X и имеют в этой области производные $u_n'(x)$. Если в этой области ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно, то его сумма равна производной от суммы первоначального ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)'$.

Определение степенного ряда

Степенным рядом общего вида называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \qquad (33.3)$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – ***коэффициенты степенного ряда***, постоянные числа.

Определение степенного ряда

Степенным рядом, расположенным по степеням x

называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (33.4)$$

получающийся из ряда (33.3) при $x_0 = 0$.

Теорема Абеля

Теорема 33.2.

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (3.4) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству: $|x| < |x_0|$.

Следствие. Если степенной ряд (3.4) расходится при $x = x_0$, то он расходится и при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_0|$.

Определение радиуса и интервала сходимости ряда

Радиусом сходимости степенного ряда

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (33.4) называется число R такое, что для всех значений $x: |x| < R$, ряд сходится, а для всех значений $x: |x| > R$, расходится.

Интервал $(-R; R)$ называется ***интервалом сходимости***.

- В частных случаях радиус сходимости ряда может быть равен нулю или бесконечности.

Отыскание радиуса сходимости

1. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ содержит все целые положительные степени, то

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

2. Если среди коэффициентов ряда a_n есть равные нулю, интервал сходимости находят, применяя непосредственно признаки Даламбера или Коши (радикальный) к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x|^n$, составленному из абсолютных величин исходного ряда.

- Для степенных рядов общего вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

  (33.3) все сказанное остается в силе с той только разницей, что центр интервала сходимости будет лежать не в точке $x = 0$, а в точке $x = x_0$ и интервалом сходимости будет интервал

  $$\left(x_0 - R; x_0 + R\right) .$$

- Для ряда (3.3) радиус сходимости находится аналогично.

- На концах интервала вопрос о сходимости или расходимости решается индивидуально для каждого конкретного ряда.

Свойства степенных рядов

1°. Сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (33.4) есть функция, непрерывная в интервале сходимости ряда.

2°. Степенной ряд, полученный почленным дифференцированием, имеет тот же интервал сходимости с суммой ряда, равной производной от суммы первоначального ряда (33.4):

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Свойства степенных рядов

3°. Степенной ряд, полученный почленным интегрированием, имеет тот же интервал сходимости с суммой ряда, равной интегралу от суммы первоначального ряда (33.4) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x a_0 dx + \int_0^x a_1 x dx + \int_0^x a_2 x^2 dx + \ldots + \int_0^x a_n x^n dx + \ldots =$$

$$= a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$