ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Основные понятия.

Степенные ряды

Теория функциональных рядов имеет большое значение в теоретических исследованиях и практических приложениях математического анализа ввиду возможности представления функции в виде бесконечного ряда более простых функций, что позволяет находить приближенное значение функции для данного значения аргумента.

Определение 33.1. ***Функциональным рядом*** называется ряд вида

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x), \qquad (33.1)$$

члены которого $u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots, u_n(x),\ \ldots$ являются функциями от x.

Определение 33.2. Совокупность значений x, при которых функции $u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots, u_n(x),\ \ldots$ определены и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится, называется ***областью сходимости функционального ряда***, а все точки из этой области – ***точками сходимости*** данного ряда.

Областью сходимости функционального ряда обычно бывает какой-нибудь промежуток оси Ox.

Очевидно, что в области сходимости ряда его сумма является некоторой функцией от x, определенной в области сходимости ряда:

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots.$$

Сумму n первых членов ряда будем обозначать через $S_n(x)$, а остаток ряда через $R_n(x)$. Для сходящегося ряда

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x), \quad \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,$$

то есть остаток $R_n(x)$ сходящегося ряда стремится к нулю при $n\to\infty$.

Определение 33.3. Сходящийся функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется ***равномерно сходящимся*** в некоторой области X, если для сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $N(\varepsilon)$, зависящее только от ε и не зависящее от x, что при всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ для любого x из области X. При этом сумма $S(x)$ равномерно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в области X, где $u_n(x)$ – непрерывные функции, есть непрерывная функция.

Теорема 33.1. (***Достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда Вейерштрасса***) Если функции $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ по абсолютной величине не превосходят в некоторой области X положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$:

$$|u_1(x)| \le a_1, \ |u_2(x)| \le a_2, \ \ldots, |u_n(x)| \le a_n, \ldots, \tag{33.2}$$

причем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в области X сходится равномерно.

Определение 33.4. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется ***мажорируемым*** в некоторой области X, если существует такой сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что для всех значений x из области X выполняются неравенства (33.2). При этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***мажорирующим***.

Замечание. Из определения следует, что ряд, мажорируемый в некоторой области X, равномерно сходится во всех точках этой области.

Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

1°. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_n(x)$ – непрерывные функции, равномерно сходится в некоторой области X и имеет сумму $S(x)$, то ряд

$$\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)dx + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$$

сходится и имеет сумму $\int_a^b S(x)dx$.

2°. Пусть функции $u_n(x)$ определены в некоторой области X и имеют в этой области производные $u_n'(x)$. Если в этой области ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно, то его сумма равна производной от суммы первоначального ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)'$.

К важнейшим классам функциональных рядов относятся ***степенные*** и ***тригонометрические ряды***.

Определение 33.5. ***Степенным рядом общего вида*** называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad (33.3)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – постоянные числа, называемые ***коэффициентами степенного ряда***.

Определение 33.6. ***Степенным рядом, расположенным по степеням*** x, называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (33.4)$$

получающийся из ряда (33.3) при $x_0 = 0$.

При исследовании степенных рядов большое значение имеет следующая теорема.

Теорема 33.2. (***Абеля***) Если степенной ряд (33.4) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству: $|x| < |x_0|$.

Следствие. Если степенной ряд (3.4) расходится при $x = x_0$, то он расходится и при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_0|$.

Из теоремы Абеля и ее следствия вытекает, что точки сходимости будут целиком заполнять некоторый интервал с центром в начале координат (рис. 33.1).

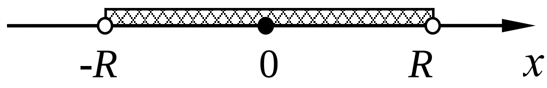

Рис. 33.1

Определение 33.7. ***Радиусом сходимости*** степенного ряда (33.4) называется число R такое, что для всех значений x: $|x| < R$, ряд сходится, а для всех значений x: $|x| > R$, расходится. При этом интервал $(-R; R)$ называется ***интервалом сходимости***.

В частных случаях радиус сходимости ряда R может быть равен нулю или бесконечности. Например, для рядов, сходящихся только в точке $x_0 = 0$ $R = 0$, а для рядов, сходящихся при всех значениях оси Ox $R = \infty$.

Замечание. Для степенных рядов общего вида (33.3) все сказанное остается в силе с той только разницей, что центр интервала сходимости будет лежать не в точке $x = 0$, а в точке $x = x_0$ (рис. 33.2), и, следовательно, интервалом сходимости будет интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$.

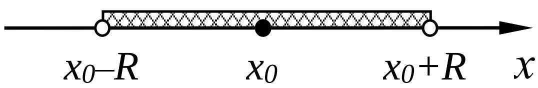

Рис. 33.2

Для отыскания интервала и радиуса сходимости степенного ряда можно воспользоваться одним из следующих способов.

1. Если ряд (33.4) содержит все целые положительные степени, то

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \text{или} \qquad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

2. Если среди коэффициентов ряда a_n есть равные нулю, т.е. задан неполный степенной ряд, интервал сходимости можно найти, применяя непосредственно признаки Даламбера или Коши (радикальный) к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n||x|^n$, составленному из абсолютных величин исходного ряда.

Аналогично находится радиус сходимости и для ряда (33.3).

На концах интервала вопрос о сходимости или расходимости данного ряда решается индивидуально для каждого конкретного ряда.

Свойства степенных рядов

1°. Сумма степенного ряда (33.4) есть функция, непрерывная в интервале сходимости ряда.

2°. Степенной ряд, полученный почленным дифференцированием, имеет тот же интервал сходимости с суммой ряда, равной производной от суммы первоначального ряда (33.4):

$$S'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}.$$

3°. Степенной ряд, полученный почленным интегрированием, имеет тот же интервал сходимости с суммой ряда, равной интегралу от суммы первоначального ряда (33.4):

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x a_0dx + \int_0^x a_1xdx + \int_0^x a_2x^2dx + \ldots + \int_0^x a_nx^ndx + \ldots =$$

$$= a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$