# ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

## Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

## Знакочередующиеся ряды. Знакопеременные ряды

# Определение знакоположительного ряда

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется

***знакоположительным рядом***,

если общий член

$$a_n > 0.$$

# Признак сравнения

**Теорема 32.1.**
Пусть для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $a_n \le b_n$. Тогда:

1) если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

# Предельный признак сравнения

**Теорема 32.2.** Пусть для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $a_n \leq b_n$. Тогда, если существует конечный предел :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \neq 0 \quad ,$$

то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)}$, где $P_k(n)$ и $Q_m(n)$ –

многочлены $k$-й и $m$-й степени соответственно от $n$ $(k < m)$, удобно сравнивать с

***обобщенным гармоническим рядом*** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$,

который сходится при $p > 1$

и расходится при $0 < p \le 1$.

Степень $p$ определяется как разность между степенями $m$ и $k$: $p = m - k$.

# Признак Даламбера

**Теорема 32.3.**

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, начиная с некоторого номера, существует предел отношения последующего члена ряда $a_{n+1}$ к предыдущему $a_n$, равный $\rho$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho .$$

Тогда при $\rho < 1$ ряд сходится, при $\rho > 1$ расходится, а при $\rho = 1$ необходимо дополнительное исследование.

# Радикальный признак Коши

**Теорема 32.4.**

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует конечный предел корня $n$-й степени из $a_n$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

Тогда при $\rho < 1$ ряд сходится, при $\rho > 1$ расходится, а при $\rho = 1$ необходимо дополнительное исследование.

# Интегральный признак Коши

**Теорема 32.5.**

Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ являются значениями непрерывной монотонно убывающей функции $f(x)$ в интервале $(1;+\infty)$ при целых значениях аргумента $x$: $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, …, $a_n = f(n)$, ….

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$,

и расходится, если этот интеграл расходится.

# Эталонные ряды

| Ряд | | | Поведение |
|---|---|---|---|
| 1 | Гармонический | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ | расходится |
| 2 | Обобщенный гармонический (ряд Дирихле) | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \quad (p>0)$ | $p>1 \Rightarrow$ сходится<br>$p\le 1 \Rightarrow$ расходится |
| 3 | | $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$ | $p>1 \Rightarrow$ сходится<br>$p\le 1 \Rightarrow$ расходится |
| 4 | Ряд бесконечной геометрической прогрессии | $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ | $\lvert q\rvert<1 \Rightarrow$ сходится<br>$\lvert q\rvert\ge 1 \Rightarrow$ расходится |

# Определение знакочередующегося ряда

***Знакочередующимся рядом*** называется ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \qquad (32.1)$$

где $a_n > 0$ .

# Признак Лейбница

**Теорема 2.6.**

Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ (32.1)
сходится, если:

1. $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots > a_n > \ldots$ ,

2. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ . (32.2)

При этом сумма ряда $S$ положительна и не превосходит первого члена $a_1$: $0 < S < a_1$.

# Определение знакопеременного ряда

***Знакопеременным рядом***

называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где $a_n$ могут быть как

положительными, так и отрицательными.

- Очевидно, что знакочередующиеся ряды – частный случай знакопеременных рядов.

# Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда

**Теорема 32.7.**

Если знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ таков, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, сходится, то и данный знакопеременный ряд также сходится.

- Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда <u>не является необходимым</u>.

# Определение абсолютной и условной сходимости ряда

- Знакопеременный ряд называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

- Сходящийся знакопеременный ряд называется ***условно сходящимся***, если расходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

# Свойства знакопеременных рядов

1°. При любой перестановке членов абсолютно сходящегося ряда он остается абсолютно сходящимся с той же суммой.

2°. При перестановке членов условно сходящегося ряда можно добиться, чтобы сумма ряда была равна какому-нибудь конкретному числу. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, что ряд, полученный после перестановки, будет расходящимся.

3°. Произведение двух абсолютно сходящихся рядов есть ряд абсолютно сходящийся с суммой ряда, равной произведению сумм рядов сомножителей.