ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

Знакочередующиеся ряды.

Знакопеременные ряды

Определение 32.1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***знакоположительным***, если общий член $a_n > 0$.

Сходимость знакоположительного ряда можно установить путем сравнения его с ***эталонным рядом***, о котором известно сходится он или расходится (см. таблицу эталонных рядов). Рассмотрим теоремы, на основании которых можно сделать подобное сравнение.

Теорема 32.1. (***Признак сравнения***) Пусть для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $a_n \le b_n$. Тогда:

1) если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

На практике удобнее пользоваться предельным признаком сравнения.

Теорема 32.2. (***Предельный признак сравнения***) Если для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \neq 0$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. Ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)}$, где $P_k(n)$ и $Q_m(n)$ – многочлены k–й и m-й степени соответственно от n $(k < m)$, удобно сравнивать с ***обобщенным гармоническим рядом*** (***рядом Дирихле***) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, который сходится при $p > 1$

и расходится при $0 < p \le 1$. Степень p определяется как разность между степенями m и k: $p = m - k$.

В том случае, когда общий член ряда a_n содержит показательные функции $\left(a^n\right)$, факториалы $(n!)$ удобно пользоваться признаком Даламбера.

Теорема 32.3. (***Признак Даламбера***) Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел отношения последующего члена ряда a_{n+1} к предыдущему a_n, равный ρ:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho .$$
Тогда при $\rho < 1$ ряд сходится, при $\rho > 1$ расходится, а при $\rho = 1$ необходимо дополнительное исследование.

В том случае, когда общий член ряда a_n представляет собой произведение или отношение различных функций в n-й степени удобно пользоваться радикальным признаком Коши.

Теорема 32.4. (***Радикальный признак Коши***) Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует конечный предел корня n-й степени из a_n: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$.

Тогда при $\rho < 1$ ряд сходится, при $\rho > 1$ расходится, а при $\rho = 1$ необходимо дополнительное исследование.

Сходимость числового ряда аналогична сходимости несобственного интеграла по бесконечному промежутку. Рассмотрим интегральный признак Коши, позволяющий в ряде случаев сводить вопрос о сходимости ряда к вопросу о сходимости соответствующего несобственного интеграла.

Теорема 32.5. (***Интегральный признак Коши***) Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ являются значениями непрерывной монотонно убывающей функции $f(x)$ в интервале $[1; +\infty)$ при целых значениях аргумента x: $a_1 = f(1)$,

$a_2 = f(2),\ \ldots, a_n = f(n),\ \ldots$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, и расходится, если этот интеграл расходится.

Замечание. В том случае, когда $n > 1$ вместо интеграла $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ берется интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, где a – наименьшее значение номера n.

Эталонные ряды

	Ряд		Поведение
1	Гармонический ряд	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	расходится
2	Обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, где $p > 0$	$p > 1 \Rightarrow$ сходится, $p \le 1 \Rightarrow$ расходится
3		$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$	$p > 1 \Rightarrow$ сходится $p \le 1 \Rightarrow$ расходится
4	Ряд бесконечной геометрической прогрессии	$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$	$\lvert q \rvert < 1 \Rightarrow$ сходится $\lvert q \rvert \ge 1 \Rightarrow$ расходится

Определение 32.2. ***Знакочередующимся рядом*** называется ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \qquad (32.1)$$

где $a_n > 0$.

Наиболее простым достаточным признаком сходимости для рядов данного типа является признак Лейбница.

Теорема 32.6. (***Признак Лейбница***) Знакочередующийся ряд (32.1) сходится, если члены ряда по абсолютной величине образуют монотонно убывающую последовательность, а общий член ряда стремится к нулю при неограниченном увеличении номера:

1. $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots > a_n > \ldots$,

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$. $\qquad (32.2)$

При этом сумма ряда S положительна и не превосходит первого члена a_1: $0 < S < a_1$.

Замечание. Если знакочередующийся ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, то ошибка, получающаяся при замене суммы ряда S на частичную сумму S_n, не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов.

Определение 32.3. ***Знакопеременным рядом*** называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где a_n могут быть как положительными, так и отрицательными.

Очевидно, что рассмотренные выше знакочередующиеся ряды являются частным случаем знакопеременных рядов.

Теорема 32.7. (*Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда*) Если знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ таков, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, сходится, то и данный знакопеременный ряд также сходится.

Замечание. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда не является необходимым. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может сходиться и в том случае, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Определение 32.4. Знакопеременный ряд называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Определение 32.5. Сходящийся знакопеременный ряд называется ***условно сходящимся***, если расходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Свойства знакопеременных рядов

1°. При любой перестановке членов абсолютно сходящегося ряда он остается абсолютно сходящимся с той же суммой.

2°. При перестановке членов условно сходящегося ряда можно добиться, чтобы сумма ряда была равна какому-нибудь конкретному числу. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, что ряд, полученный после перестановки, будет расходящимся.

3°. Произведение двух абсолютно сходящихся рядов есть ряд абсолютно сходящийся с суммой ряда, равной произведению сумм рядов сомножителей:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \ldots .$$