ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Основные понятия.

Необходимый признак сходимости ряда

Определение числового ряда

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

– бесконечная последовательность чисел.

Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (31.1)$$

числа $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ – ***члены ряда***,
выражение для n-го члена ряда при произвольном значении n – ***общий член ряда***.

- Ряд (31.1) считается заданным, если известен его общий член ряда a_n, выраженный как функция номера n: $a_n = f(n)$.

- Чтобы найти какой-либо произвольный член ряда a_n нужно в формулу общего члена ряда вместо $"n"$ подставить значение соответствующего номера.

Определение частичной суммы ряда

n-й частичной суммой ряда называется сумма n первых членов ряда (31.1) и обозначается S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \cdot$$

- Рассмотрим последовательность частичных сумм ряда:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$$

Определение сходящегося ряда

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (31.1) называется ***сходящимся***,

если существует конечный предел $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ последовательности частичных сумм ряда и ***расходящимся***,

если предел последовательности частичных сумм ряда не существует или бесконечен.

Определение суммы ряда

Суммой S ***ряда*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (31.1) называется

конечный предел последовательности частичных сумм ряда:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Свойства числовых рядов

1°. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и имеет сумму S,

то ряд, образованный из произведений всех

членов данного ряда на число k: $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n$,

также сходится и имеет сумму $k\,S$.

Свойства числовых рядов

2°. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и имеют

суммы S_1 и S_2 соответственно, то ряд, полученный сложением соответствующих

членов: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, также сходится и

имеет сумму $S_1 + S_2$.

Свойства числовых рядов

3°. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем приписывания или отбрасывания любого конечного числа членов исходного ряда.

Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 1.1.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (31.1) сходится, то общий член ряда a_n стремится к нулю при неограниченном возрастании его номера, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 . \qquad (31.2)$$

Достаточный признак расходимости ряда

Следствие 1.1.

Если общий член a_n ряда (31.1) не стремится

к нулю при неограниченном возрастании его

номера: $$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

- Необходимый признак сходимости ряда не является достаточным, так как можно привести примеры, когда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, а $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ряд при этом будет расходящимся.