ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Основные понятия.

Необходимый признак сходимости ряда

Пусть дана бесконечная последовательность чисел, составленная по определенному закону: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots.$

Определение 31.1. ***Числовым рядом*** называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (31.1)$$

где числа $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ называются ***членами ряда***, а выражение для n-го члена ряда при произвольном значении n называется ***общим членом ряда***.

Ряд (1.1) считается заданным, если известен его общий член ряда a_n, выраженный как функция номера n: $a_n = f(n)$.

Чтобы найти какой-либо произвольный член ряда нужно в формулу общего члена ряда a_n вместо $"n"$ подставить значение соответствующего номера.

Определение 31.2. Сумма n первых членов ряда (31.1) называется ***n-й частичной суммой ряда*** и обозначается S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Рассмотрим последовательность частичных сумм ряда:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ \ldots$$

Определение 31.3. Ряд (1.1) называется ***сходящимся***, если существует конечный предел последовательности частичных сумм ряда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и ***расходящимся***, если предел последовательности частичных сумм ряда не существует или бесконечен.

Определение 31.4. ***Суммой*** S ***ряда*** (31.1) называется конечный предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Свойства числовых рядов

1°. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и имеет сумму S, то ряд, образованный из произведений всех членов данного ряда на число k: $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$, также сходится и имеет сумму kS.

2°. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и имеют суммы S_1 и S_2 соответственно, то ряд, полученный сложением соответствующих членов: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, также сходится и имеет сумму $S_1 + S_2$.

3°. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем приписывания или отбрасывания любого конечного числа членов исходного ряда.

Теорема 31.1. (***Необходимый признак сходимости ряда***) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (31.1) сходится, то общий член ряда a_n стремится к нулю при неограниченном возрастании его номера, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0. \qquad (31.2)$$

Следствие 31.1. (***Достаточный признак расходимости ряда***) Если общий член a_n ряда (31.1) не стремится к нулю при неограниченном возрастании его номера: $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Отметим, что необходимый признак сходимости ряда не является достаточным, так как можно привести примеры, когда $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ при этом является расходящимся.

Например, ***гармонический ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ расходится.