СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Системы двух дифференциальных уравнений первого порядка

Системой дифференциальных уравнений первого порядка называется совокупность дифференциальных уравнений первого порядка, содержащих независимую переменную, неизвестные функции и их производные.

Ограничимся рассмотрением системы двух дифференциальных уравнений первого порядка.

Определение 30.1. Система дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = f_1(x, y_1, y_2), \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = f_2(x, y_1, y_2), \end{cases} \tag{30.1}$$

где x - независимая переменная, $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2)$ - неизвестные функции, функции $f_i(x, y_1, y_2)$ определены и непрерывны в некоторой области $D \subset R^3$, называется ***нормальной системой***.

Определение 30.2. Нормальная система (30.1) называется ***линейной***, если правые части $f_i(x, y_1, y_2)$ являются линейными функциями относительно y_i $(i = 1, 2)$.

Определение 30.3. ***Решением*** системы (30.1) на интервале (a, b) называется совокупность двух функций $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2)$ таких, что

1) они дифференцируемы на интервале (a, b);

2) точка $(x, y_1(x), y_2(x)) \in D$ для любого $x \in (a, b)$;

3) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1(x)}{\mathrm{d}x} = f_1(x, y_1(x), y_2(x)), \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2(x)}{\mathrm{d}x} = f_2(x, y_1(x), y_2(x)) \end{cases}$ для любого $x \in (a, b)$.

Задача Коши для системы (30.1) ставится следующим образом: найти решение $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ системы (30.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0, \tag{30.2}$$

где точка $\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right) \in D$.

Теорема 30.1. (***существования и единственности решения задачи Коши***) Если правые части $f_i(x, y_1, y_2)$ $\left(i = 1,2\right)$ нормальной системы (30.1) непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $\left(j, i = 1,2\right)$ в области D, то для любой точки $\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right) \in D$ в некоторой окрестности $\left(x_0 - \delta, x_0 + \delta\right)$ точки x_0 существует единственное решение $y_i = y_i(x)$ системы (30.1), удовлетворяющее начальными условиями (30.2).

Определение 30.4. Система двух функций $y_i = y_i(x, C_1, C_2)$ $\left(i = 1,2\right)$ независимой переменной x и двух произвольных постоянных C_1, C_2 называется ***общим решением*** нормальной системы (30.1) в области D, если 1) при любых допустимых значениях C_1, C_2 система функций $y_i = y_i(x, C_1, C_2)$ является решением системы (30.1); 2) для любых начальных условий (30.2) существуют единственные значения постоянных $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$, при которых решение $y_i = y_i(x, C_1^0, C_2^0)$ удовлетворяет начальным условиям (30.2).

Определение 30.5. ***Частным решением*** нормальной системы (30.1) в области D называется решение $y_i = y_i(x, C_1^0, C_2^0)$ $\left(i = 1,2\right)$, получающееся из общего решения $y_i = y_i(x, C_1, C_2)$ при определённых значениях постоянных $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$.

Заметим, что дифференциальное уравнение второго порядка, разрешённое относительно $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2}$, т.е. $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2} = f(x, y, \dfrac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x})$, может быть приведено к нормальной системе (30.1). Нормальная система (30.1) при определённых условиях может быть приведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка. На этом основан один из методов решения систем дифференциальных уравнений - ***метод исключения*** неизвестных.

Покажем, что решение системы (30.1) может быть сведено к решению дифференциального уравнения второго порядка с одной неизвестной функцией, например, $y_1 = y_1(x)$. Предположим, что первое уравнение системы (30.1) разрешимо относительно y_2 и функция $f_1(x, y_1, y_2)$ непрерывно дифференцируема по x, y_1, y_2. Дифференцируя первое из уравнений системы (30.1) по x, получаем

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d} x^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\mathrm{d} y_1}{\mathrm{d} x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\mathrm{d} y_2}{\mathrm{d} x}.$$

Здесь производные $\frac{\mathrm{d} y_1}{\mathrm{d} x}, \frac{\mathrm{d} y_2}{\mathrm{d} x}$ заменяем соответственно правыми частями f_1, f_2 системы (30.1). В результате получаем соотношение вида $\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d} x^2} = F(x, y_1, y_2)$, т.е. переходим к системе

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d} y_1}{\mathrm{d} x} = f_1(x, y_1, y_2), \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d} x^2} = F(x, y_1, y_2), \end{cases} \tag{30.3}$$

которая не содержит $\frac{\mathrm{d} y_2}{\mathrm{d} x}$.

Определяя y_2 из первого уравнения системы (30.3) и подставляя во второе уравнение этой системы, получаем дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции y_1:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d} x^2} = \Phi\left(x, y_1, \frac{\mathrm{d} y_1}{\mathrm{d} x} \right).$$

Решаем полученное дифференциальное уравнение второго порядка, находим решение исходной системы уравнений (30.1).

Важным частным случаем нормальных систем являются линейные системы.

Проиллюстрируем метод исключения неизвестных на примере линейной системы нормального вида с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2(x), \end{cases} \tag{30.4}$$

где $a_{i\,j}$ $(i, j = 1{,}2)$ - постоянные коэффициенты, $g_i(x)$ - заданные функции, $y_i(x)$ - искомые функции, y_i' - их производные $(i = 1{,}2)$. Из первого уравнения системы (30.4) находим

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}}\left(y_1' - a_{11}y_1 - g_1(x)\right). \tag{30.5}$$

Подставляя во второе уравнение системы вместо y_2 правую часть (30.5), а вместо y_2' производную от правой части (30.5), получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно y_1:

$$Ay_1'' + By_1' + Cy_1 + F(x) = 0,$$

где A, B, C - постоянные. Отсюда находим $y_1 = y_1(x, C_1, C_2)$. Подставляя найденное выражение для y_1 и y_1' в (30.5), получаем y_2.

Пример 30.1. Методом исключения решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} y_1' = y_2 + 1, \\ y_2' = 2e^x - y_1. \end{cases}$

$\lhd$ Из первого уравнения имеем $y_2 = y_1' - 1$. Тогда $y_2' = y_1''$. Подставляя во второе уравнение, получаем уравнение второго порядка

$$y_1'' + y_1 = 2e^x.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью. Общее решение данного уравнения ищем в виде

$$y_1 = y_{oo} + y_{чн},$$

где y_{oo} - общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y_1'' + y_1 = 0,$$

$y_{чн}$ - частное решение неоднородного уравнения.

Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = i, k_2 = -i \Rightarrow$

$y_{оо} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Частное решение ищем в виде

$y_{чн} = Ae^x$, где A - неизвестный коэффициент.

Подставляя $y_{чн} = Ae^x$ в уравнение $y_1'' + y_1 = 2e^x$, получаем $A = 1 \Rightarrow$

$$y_{чн} = e^x.$$

Тогда $y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x$.

Значит, $y_2 = y_1' - 1 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + e^x - 1$.

Общее решение системы имеет вид

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x, \quad y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + e^x - 1,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. ▹