СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Системой дифференциальных уравнений первого порядка называется совокупность дифференциальных уравнений первого порядка, содержащих независимую переменную, неизвестные функции и их производные.

Определение нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка

Система дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,y_1}{\mathrm{d}\,x} = f_1(x, y_1, y_2), \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}\,x} = f_2(x, y_1, y_2), \end{cases} \tag{30.1}$$

где x − независимая переменная,

$y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2)$ − неизвестные функции,

функции $f_i(x, y_1, y_2)$ определены и непрерывны в некоторой области $D \subset R^3$, называется **нормальной системой**.

Определение решения системы (30.1)

Решением системы (30.1) на интервале (a,b) называется совокупность двух функций $y_i = y_i(x)$ $\left(i = 1,2\right)$ таких, что

1) они дифференцируемы на интервале (a,b);

2) точка $(x, y_1(x), y_2(x)) \in G$ для любого $x \in (a,b)$;

3) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\, y_1(x)}{\mathrm{d}\, x} = f_1(x, y_1(x), y_2(x)), \\ \dfrac{\mathrm{d}\, y_2(x)}{\mathrm{d}\, x} = f_2(x, y_1(x), y_2(x)) \end{cases}$ для любого $x \in (a,b)$.

Постановка задачи Коши для системы (30.1)

Найти решение $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ системы (30.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y^0_1, \qquad y_2(x_0) = y^0_2, \tag{30.2}$$

где точка $\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right) \in D$.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Теорема 30.1.

Если правые части $f_i(x, y_1, y_2)$ $(i = 1,2)$ нормальной системы (30.1) непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(j, i = 1,2)$ в области D, то для любой точки $\left(x_0, y_1^0, y_2^0\right) \in D$ в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 существует единственное решение $y_i = y_i(x)$ системы (30.1), удовлетворяющее начальными условиями (30.2).

<u>Определение общего решения системы (30.1)</u>

Система двух функций $y_i = y_i(x, C_1, C_2)$ $\left(i = 1, 2\right)$ независимой переменной x и двух произвольных постоянных C_1, C_2 называется **общим решением** нормальной системы (30.1) в области D, если:

1) при любых допустимых значениях C_1, C_2 система функций $y_i = y_i(x, C_1, C_2)$ является решением системы (30.1);

2) для любых начальных условий (30.2) существуют единственные значения постоянных $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$, при которых решение $y_i = y_i(x, C_1^0, C_2^0)$ удовлетворяет начальным условиям (30.2).

Определение частного решения системы (30.1)

Частным решением нормальной системы (30.1) в области D называется решение $y_i = y_i(x, C_1^0, C_2^0)$ $(i = 1, 2)$, получающееся из общего решения $y_i = y_i(x, C_1, C_2)$, при определённых значениях постоянных $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$.

Метод исключения неизвестных

При определённых условиях нормальная система (30.1) может быть приведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка.

Алгоритм решения системы (30.1) методом исключения

1) Дифференцируем первое из уравнений системы (30.1) по x;

2) получаем

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d} x^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\mathrm{d} y_1}{\mathrm{d} x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\mathrm{d} y_2}{\mathrm{d} x}.$$

3) заменяем производные $\frac{\mathrm{d} y_1}{\mathrm{d} x}, \frac{\mathrm{d} y_2}{\mathrm{d} x}$ соответственно правыми частями f_1, f_2 системы (30.1);

Алгоритм решения системы (30.1) методом исключения

4) получаем соотношение вида $\dfrac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}x^2} = F(x, y_1, y_2)$, т.е. переходим к системе

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = f_1(x, y_1, y_2), \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}x^2} = F(x, y_1, y_2), \end{cases} \qquad (30.3)$$

которая не содержит $\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}$;

5) определяем y_2 из первого уравнения системы (30.3);

Алгоритм решения системы (30.1) методом исключения

6) подставляем y_2 во второе уравнение этой системы;

7) получаем дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции y_1:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}x^2} = \Phi\left(x, y_1, \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\right);$$

8) решаем полученное дифференциальное уравнение второго порядка;
9) находим решение исходной системы уравнений (30.1).