ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{29.1}$$

правая часть которого имеет специальный вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x). \tag{29.2}$$

Здесь α, β - действительные числа, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ - многочлены степени n и m соответственно.

Замечание. $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ - многочлен степени n, коэффициенты $a_n, a_{n-1}, .., a_1, a_0 \in R$.

Например, $P_0(x) = a_0$,

$P_1(x) = a_1 x + a_0$,

$P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

В этом случае общее решение $y_{он}$ неоднородного уравнения удобнее находить в виде $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$, где $y_{оо}$ - общее решение соответствующего однородного уравнения, $y_{чн}$ - частное решение неоднородного уравнения.

Частное решение $y_{чн}$ ищем в виде

$$y_{чн} = x^r e^{\alpha x}(\tilde{P}_s(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_s(x)\sin\beta x),$$

где r – кратность корня $\alpha + \beta i$ характеристического уравнения (если $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения, то $r = 0$); $\tilde{P}_s(x)$, $\tilde{Q}_s(x)$ - некоторые многочлены степени $s = \max\{n, m\}$ с неопределёнными коэффициентами, которые можно найти ***методом неопределённых коэффициентов***.

В таблице 1 приведены виды частных решений для различных видов правой части уравнения (29.1).

Теорема 29.1. (***принцип суперпозиции***). Если $y_k(x)$ - частное решение уравнения $y'' + py' + qy = f_k(x)$ $(k = 1, 2, \dots, m)$, то функция $y(x) = \sum_{k=1}^{m} y_k(x)$ является частным решением уравнения $y'' + py' + qy = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)$.

Таблица 1

	Правая часть дифференциального уравнения	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
1	$f(x) = P_n(x)$	а) Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$y_{чн}(x) = \widetilde{P}_n(x)$
		б) Число 0 - корень характеристического уравнения	$y_{чн}(x) = x\widetilde{P}_n(x)$
2	$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, α –заданное число	а) Число α не является корнем характеристического уравнения	$y_{чн}(x) = \widetilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$
		б) Число α – корень характеристического уравнения кратности r	$y_{чн}(x) = x^r\widetilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$
3	$f(x) = M\cos\beta x +$ $+ N\sin\beta x$, M, N, β – заданные числа	а) Число βi не является корнем характеристического уравнения	$y_{чн} = A\cos\beta x + B\sin\beta x$, A, B - неизвестные коэффициенты
		б) Число βi – корень характеристического уравнения	$y_{чн} = x(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, A, B - неизвестные коэффициенты
4	$f(x) = e^{\alpha x}(M\cos\beta x +$ $+ N\sin\beta x)$, M, N, β – заданные числа	а) Число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$y_{чн} = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, A, B - неизвестные коэффициенты
		б) Число $\alpha + \beta i$ – корень характеристического уравнения	$y_{чн} = xe^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, A, B - неизвестные коэффициенты

Пример 29.1. Решить дифференциальное уравнение $y'' - 2y' = 3xe^{2x}$.

$\triangleleft$ Общее решение данного уравнения ищем в виде $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$, где y_{oo} – общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 2y' = 0.$$

Его характеристическое уравнение $k^2 - 2k = 0$ имеет корни $k_1 = 0,\ k_2 = 2 \Rightarrow$

$$y_{oo} = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Правая часть неоднородного уравнения имеет специальный вид $f(x) = 3xe^{2x}$ (см. *табл.* 1, *случай* 2,б): $P_1(x) = 3x \Rightarrow n = 1;\ \alpha = 2 = k_2$ - корень характеристического уравнения кратности $r = 1 \Rightarrow$ частное решение будем искать в виде

$$y_{чн} = x(Ax + B)e^{2x} = (Ax^2 + Bx)e^{2x},$$

где A и B – неизвестные коэффициенты.

Подставляя $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в исходное уравнение, получаем (после сокращения на $e^{2x} \neq 0$)

$$4Ax + 2A + 2B \equiv 3x \quad \text{на } R.$$

Сравнивая коэффициенты обеих частей этого тождества, получаем систему уравнений для определения неизвестных A и B:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & \multirow{2}{*}{} \\ x^o & \end{array} \begin{cases} 4A = 3, \\ 2A + 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0{,}75, \\ B = -0{,}75. \end{cases}$$

Тогда $y_{чн} = (0{,}75x^2 - 0{,}75x)\ e^{2x}$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y_{он} = C_1 + C_2 e^{2x} + 0{,}75\,(x^2 - x)\ e^{2x}$. ▷