ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x), \qquad (29.1)$$

правая часть которого имеет специальный вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right), \qquad (29.2)$$

где α, β − действительные числа,

$P_n(x)$, $Q_m(x)$ − многочлены степени n и m соответственно.

Общее решение и вид частного решения неоднородного уравнения (29.1)

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} \, ,$$

где $y_{оо}$ − общее решение соответствующего однородного уравнения,

$y_{чн}$ − частное решение неоднородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{чн} = x^r e^{\alpha x} \left(\tilde{P}_s(x) \cos\beta x + \tilde{Q}_s(x) \sin\beta x \right),$$

где r – кратность корня $\alpha + \beta i$ характеристического уравнения;

$\tilde{P}_s(x)$, $\tilde{Q}_s(x)$ − некоторые многочлены степени $s = \max\{n, m\}$ с неопределёнными коэффициентами, которые можно найти **методом неопределённых коэффициентов.**

Принцип суперпозиции решений неоднородного уравнения

Теорема 29.1.

Если $y_k\left(x\right)$ − частное решение уравнения $y'' + py' + qy = f_k(x)$, $k = \overline{1,m}$,

то функция $y\left(x\right) = \sum_{k=1}^{m} y_k\left(x\right)$ является частным решением уравнения

$$y'' + py' + qy = \sum_{k=1}^{m} f_k\left(x\right).$$

Таблица видов частных решений для различных видов правой части уравнения (29.1)

	Правая часть дифференциального уравнения	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
1	$f(x) = P_n(x)$	а) Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$y_{чн}(x) = \tilde{P}_n(x)$
		б) Число 0 - корень характеристического уравнения	$y_{чн}(x) = x\tilde{P}_n(x)$
2	$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, α –заданное число	а) Число α не является корнем характеристического уравнения	$y_{чн}(x) = \tilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$
		б) Число α – корень характеристического уравнения кратности r	$y_{чн}(x) = x^r\tilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$

Таблица видов частных решений для различных видов правой части уравнения (29.1)

	Правая часть дифференциального уравнения	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
3	$f(x) = M\cos\beta x + {}$ $+ N\sin\beta x$, M, N, β – заданные числа	а) Число βi не является корнем характеристического уравнения	$y_{чн} = A\cos\beta x + B\sin\beta x$, A, B - неизвестные коэффициенты
		б) Число βi – корень характеристического уравнения	$y_{чн} = x\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$, A, B - неизвестные коэффициенты
4	$f(x) = e^{\alpha x}(M\cos\beta x + {}$ $+N\sin\beta x)$, M, N, β – заданные числа	а) Число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$y_{чн} = e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$, A, B - неизвестные коэффициенты
		б) Число $\alpha + \beta i$ – корень характеристического уравнения	$y_{чн} = xe^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$, A, B - неизвестные коэффициенты