ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение 28.1. Уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{28.1}$$

где $p, q \in R$, функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором интервале (a,b), называется ***линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами***.

Если $f(x) \equiv 0$ на интервале (a,b), то уравнение (28.1) называется ***линейным однородным***; если $f(x) \not\equiv 0$ на интервале (a,b), то − ***линейным неоднородным***.

Однородное уравнение с той же левой частью, что и данное неоднородное, называется ***соответствующим ему***.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим некоторые свойства решений линейных однородных уравнений.

Теорема 28.1. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ − решения уравнения

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{28.2}$$

на интервале (a,b), то функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где C_1, C_2 − произвольные постоянные, также является решением уравнения (28.2).

Определение 28.2. Функции $y_1(x), y_2(x)$ называются ***линейно зависимыми на интервале*** (a,b), если существуют числа α_1, α_2, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что для всех $x \in (a,b)$

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0. \tag{28.3}$$

Если тождество (28.3) выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то функции $y_1(x), y_2(x)$ называются ***линейно независимыми на интервале*** (a,b).

Определение 28.3. Пусть функции $y_1(x),\, y_2(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b).

Определитель $W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ называется ***определителем Вронского*** (вронскианом) для этих функций.

Теорема 28.2. Если функции $y_1(x),\, y_2(x)$ линейно зависимы на интервале (a,b), то $W(x)\equiv 0$ на этом интервале.

Замечание. Из теоремы 2 следует, что если $W(x)\neq 0$ хотя бы в одной точке интервала (a,b), то функции $y_1(x),\, y_2(x)$ линейно независимы на интервале (a,b).

Теорема 28.3. Если решения $y_1(x),\, y_2(x)$ уравнения (28.2) линейно независимы на интервале (a,b), то $W(x)\neq 0$ на этом интервале.

Определение 28.4. Любая система из двух линейно независимых на интервале (a,b) решений $y_1(x), y_2(x)$ уравнения (28.2) называется ***фундаментальной системой решений*** этого уравнения на интервале (a,b).

Теорема 28.4. (о структуре общего решения линейного однородного уравнения). Если функции $y_1(x),\, y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (28.2) на интервале (a,b), то функция

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x), \tag{28.4}$$

где C_1, C_2- произвольные постоянные, является общим решением уравнения (28.2).

Будем искать решение уравнения (28.2) в виде

$$y=e^{kx}, \tag{28.5}$$

где k − действительное или комплексное число.

Подставляя (28.5) в уравнение (28.4), получаем $e^{kx}\left(k^2+pk+q\right)=0$. Так как $e^{kx}\neq 0$, то функция (28.5) является решением уравнения (28.2) тогда и только тогда, когда k − корень уравнения

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (28.6)$$

Уравнение (28.6) называется ***характеристическим уравнением*** для уравнения (28.2). Пусть k_1, k_2 − корни характеристического уравнения.

Теорема 28.5. Общее решение уравнения (28.2) может быть записано следующим образом:

1) если корни характеристического уравнения действительные и различные $(k_1 \neq k_2)$, то общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

2) если корни характеристического уравнения действительные и равные $(k_1 = k_2 = k)$, то общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x \cdot e^{kx};$$

3) если корни характеристического уравнения комплексные $(k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i, \quad \beta > 0)$, то общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

где C_1, C_2 − произвольные постоянные.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Теорема 28.6. Общее решение $y_{он}$ неоднородного уравнения (28.1) равно сумме общего решения $y_{оо}$ соответствующего однородного уравнения (28.2) и частного решения $y_{чн}$ неоднородного уравнения (28.1):

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}. \qquad (28.7)$$

Метод вариации произвольных постоянных. Пусть известна фундаментальная система решений $y_1(x),\ y_2(x)$ однородного уравнения (28.2) на интервале (a,b). Тогда, по теореме 28.4, общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где C_1, C_2 − произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения (28.1) ищем в виде

$$y = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x), \tag{28.8}$$

где $C_1(x), C_2(x)$ − неизвестные функции.

Сначала находим производные функций $C_1(x), C_2(x)$, решая систему линейных алгебраических уравнений относительно $C_1'(x), C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 = 0\,, \\ C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' = f(x). \end{cases} \tag{28.9}$$

Определитель системы (28.9) – это определитель Вронского $W(x) \neq 0$ на интервале (a,b), поэтому система имеет единственное решение

$$C_1'(x) = \varphi_1(x),\; C_2'(x) = \varphi_2(x),$$

где $\varphi_1(x),\; \varphi_2(x)$ − известные функции.

Интегрируя, получаем

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)\mathrm{d}\,x + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = \int \varphi_2(x)\mathrm{d}\,x + \tilde{C}_2,$$

где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ − произвольные постоянные. Подставляя найденные функции $C_1(x), C_2(x)$ в (28.8), получаем общее решение неоднородного уравнения (28.1).

Пример 28.1. Решить дифференциальное уравнение $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

◁ Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y'' + y = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет комплексные корни $k_1 = i, k_2 = -i \;\Rightarrow$ система функций $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$− фундаментальная система решений этого уравнения. Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x, \tag{28.10}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ − неизвестные функции.

Система (28.9) принимает вид $\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'\cos x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases} \Rightarrow$

$C_1'(x) = -1,\; C_2'(x) = \mathrm{ctg}\, x$.

Интегрированием находим $C_1(x) = -x + \tilde{C}_1,\;\; C_2(x) = \ln|\sin x| + \tilde{C}_2$.

Подставляя $C_1(x) = -x + \tilde{C}_1$, $C_2(x) = \ln|\sin x| + \tilde{C}_2$ в (28.10), получаем общее решение неоднородного уравнения

$$y = \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x - x \cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x|,$$

где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ − произвольные постоянные,

$y_{oo} = \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x -$ общее решение соответствующего однородного уравнения,

$y_{чн} = -x \cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x|$ − частное решение неоднородного уравнения. ▹