ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Определение линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x), \tag{28.1}$$

где $p, q \in R$, функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором интервале (a,b), называется **линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.**

<u>Определение линейных однородного и неоднородного уравнений</u>

Если $f(x) \equiv 0$ на интервале (a,b), то уравнение (28.1) называется **линейным однородным**; если $f(x) \not\equiv 0$ на интервале (a,b), то − **линейным неоднородным.**

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Теорема 28.1.

Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ − решения уравнения

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{28.2}$$

на интервале (a,b), то функция $\boldsymbol{y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}$,

где C_1, C_2 − произвольные постоянные, также является решением уравнения (28.2).

Определение определителя Вронского

Пусть функции $y_1(x), y_2(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b).

Определитель $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ называется **определителем Вронского** (вронскианом) для этих функций.

Определение фундаментальной системы решений

Любая система из двух линейно независимых на интервале (a,b) решений $y_1(x), y_2(x)$ уравнения (28.2) называется **фундаментальной системой решений** этого уравнения на интервале (a,b).

Определение характеристического уравнения

Уравнение $\boldsymbol{k^2 + p k + q = 0}$ называется **характеристическим уравнением** для уравнения (28.2).

$\boldsymbol{k_1, k_2}$ – корни характеристического уравнения.

Теорема об общем решении уравнения (28.2)

Теорема 28.5.

Общее решение уравнения (28.2) может быть записано так:

1) если корни характеристического уравнения действительные и различные, т.е. $k_1 \neq k_2$, то общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

2) если корни характеристического уравнения действительные и равные, т.е. $k_1 = k_2 = k$, то общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x \cdot e^{kx};$$

3) если корни характеристического уравнения комплексные, т.е. $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$, $\beta > 0$, то общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin\beta x,$$

где C_1, C_2 − произвольные постоянные.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Теорема 28.6.

Общее решение $y_{он}$ неоднородного уравнения (28.1) равно сумме общего решения $y_{оо}$ соответствующего однородного уравнения (28.2) и частного решения $y_{чн}$ неоднородного уравнения (28.1):

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}. \qquad (28.7)$$

Алгоритм решения уравнения (28.1) методом вариации произвольных постоянных

1) известна фундаментальная система решений $y_1(x),\ y_2(x)$ однородного уравнения (28.2) на интервале (a,b);

2) общее решение этого уравнения $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$,
где $C_1, C_2 -$ произвольные постоянные;
3) ищем общее решение неоднородного уравнения (28.1) в виде

$$\mathbf{y = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)}, \qquad (28.8)$$

где $C_1(x), C_2(x) -$ неизвестные функции;

Алгоритм решения уравнения (28.1) методом вариации произвольных постоянных

4) решая систему линейных алгебраических уравнений относительно $C_1'(x), C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 = 0\,, \\ C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' = f(x), \end{cases} \tag{28.9}$$

находим $C_1'(x)=\varphi_1(x),\ C_2'(x)=\varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$ − известные функции;

Алгоритм решения уравнения (28.1) методом вариации произвольных постоянных

5) Интегрируя $C_1'(x) = \varphi_1(x)$, $C_2'(x) = \varphi_2(x)$, получаем

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = \int \varphi_2(x)\,\mathrm{d}x + \tilde{C}_2,$$

где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ − произвольные постоянные;

6) найденные функции $C_1(x), C_2(x)$ подставляем в (28.8);

7) получаем общее решение неоднородного уравнения (28.1).