ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Основные понятия.

Понижение порядка уравнения

Определение 27.1. Уравнение

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0, \tag{27.1}$$

где x − независимая переменная, $y = y(x)$ − искомая функция, y', y'' − её производные, функция F определена и непрерывна в некоторой области $G \subset R^4$, называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка.***

Определение 27.2. Уравнение

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{27.2}$$

где функция f определена и непрерывна в некоторой области $D \subset R^3$, называется ***дифференциальным уравнением второго порядка, разрешённым относительно производной.***

Определение 27.3. ***Решением дифференциального уравнения*** (27.2) на интервале (a, b) называется функция $y = y(x)$ такая, что

1) $y = y(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b);

2) точка $\left(x, y(x), y'(x)\right) \in D$ для любого $x \in (a, b)$;

3) $y''(x) = f\left(x, y(x), y'(x)\right)$ для любого $x \in (a, b)$.

График решения $y = y(x)$ называется ***интегральной кривой*** данного дифференциального уравнения.

Задачей Коши для дифференциального уравнения (27.2) называется задача нахождения решения $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющего условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'\left(x_0\right) = y_0', \tag{27.3}$$

где точка $\left(x_0, y_0, y_0'\right) \in D.$

Условия (27.3) называются ***начальными условиями***.

Теорема 27.1. (***существования и единственности решения задачи Коши***) Если в уравнении (27.2) функция $f(x, y, y')$ и её частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial y'}$ непрерывны в области D, то для любой точки $(x_0, y_0, y_0') \in D$ в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 существует единственное решение уравнения (27.2), удовлетворяющее начальными условиями (27.3).

Геометрически это означает, что через данную точку (x_0, y_0) плоскости Oxy с данным угловым коэффициентом y_0' касательной проходит единственная интегральная кривая уравнения (27.2).

Определение 27.4. ***Общим решением*** дифференциального уравнения (27.2) в области D называется функция $y = y(x, C_1, C_2)$, зависящая от x и двух произвольных постоянных C_1, C_2, такая, что: 1) она является решением уравнения (27.2) при любых допустимых значениях произвольных постоянных C_1, C_2; 2) для любых начальных условий (27.3) существуют единственные значения постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$ такие, что решение $y = y(x, C_1^0, C_2^0)$ удовлетворяет начальным условиям (27.3).

Определение 27.5. ***Частным решением*** дифференциального уравнения (27.2) в области D называется функция $y = y(x, C_1^0, C_2^0)$, которая получается из общего решения $y = y(x, C_1, C_2)$ при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$.

Определение 27.6. Соотношение вида

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0, \tag{27.4}$$

неявно задающее общее решение уравнения (27.2), называется ***общим интегралом*** уравнения (27.2) в области D.

Определение 27.7. Соотношение $\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$, получаемое из (27.4) при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$, называется ***частным интегралом*** уравнения (27.2) в области D.

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих ***понижение порядка.***

1. ***Уравнение вида*** $y'' = f(x)$.

Общее решение этого уравнения находим последовательным двукратным интегрированием: $y' = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1$,

$$y = \int\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + C_1 x + C_2,$$

где C_1, C_2 − произвольные постоянные.

Пример 27.1. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' = e^{x/2} - \frac{2}{x^2} + \sin 3x.$$

$\triangleleft$ Последовательно дважды интегрируя, получаем

$$y' = \int (e^{x/2} - \frac{2}{x^2} + \sin 3x)\,\mathrm{d}x = 2e^{x/2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{3}\cos 3x + C_1;$$

$$y = \int (2e^{x/2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{3}\cos 3x + C_1)\,\mathrm{d}x = 4e^{x/2} + 2\ln|x| - \frac{1}{9}\sin 3x + C_1 x + C_2,$$

где C_1, C_2 − произвольные постоянные. $\triangleright$

2. ***Уравнение вида*** $F(x, y', y'') = 0$.

Уравнение не содержит явно неизвестной функции $y(x)$.

Порядок уравнения можно понизить заменой переменной

$$y' = z(x),\; y'' = z'(x).$$

Уравнение преобразуется в уравнение первого порядка $F(x, z, z') = 0$.

Пример 27.2. Решить задачу Коши $y'' - \frac{3y'}{x} = x$, $y(1) = \frac{2}{3}$, $y'(1) = 3$.

$\triangleleft$ Пусть $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'(x)$ и уравнение принимает вид

$z' - \frac{3z}{x} = x$. Это линейное уравнение первого порядка. Решая его методом Бернулли, получаем

$$z = C_1 x^3 - x^2 \;\Rightarrow\; y' = C_1 x^3 - x^2 \;\Rightarrow\; y = C_1 \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_2 .$$

Постоянные C_1, C_2 находим из начальных условий:

$$\begin{cases} y(1) = \frac{2}{3}, \\ y'(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{C_1}{4} - \frac{1}{3} + C_2 = \frac{2}{3}, \\ C_1 - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 4, C_2 = 0.$$

Решение задачи Коши имеет вид $y = x^4 - \frac{x^3}{3}$. ▹

3. ***Уравнение вида*** $F(y, y', y'') = 0$.

Уравнение не содержит явно независимой переменной x. Порядок уравнения можно понизить заменой переменной

$$y' = p(y).$$

Тогда

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\, p .$$

Уравнение преобразуется в уравнение первого порядка относительно новой искомой функции $p(y)$ переменной y.

Пример 27.3. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2y\left(y'\right)^3 = 0$.

◃ Пусть $y' = p(y)$, тогда $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} p$ и уравнение принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} p + 2yp^3 = 0 \quad \text{или} \quad p\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + 2yp^2\right) = 0 .$$

Отсюда получаем $p = 0$ или $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + 2yp^2 = 0$.

Если $p = 0$, то $y' = 0 \Leftrightarrow y = C$, где C − произвольная постоянная.

Если $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + 2yp^2 = 0$, то, разделяя переменные и интегрируя, находим

$p=\dfrac{1}{y^2+C_1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\dfrac{1}{y^2+C_1}$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, записываем общий интеграл исходного уравнения $\dfrac{y^3}{3}+C_1y=x+C_2$, где C_1, C_2 − произвольные постоянные. ▹