ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

Уравнение

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{27.1}$$

где x − независимая переменная, $y = y(x)$ − искомая функция, y', y'' − её производные, функция F определена и непрерывна в некоторой области $G \subset R^4$, называется **обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка.**

Определение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, разрешенного относительно производной

Уравнение

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{27.2}$$

где функция f определена и непрерывна в некоторой области $D \subset R^3$, называется **дифференциальным уравнением второго порядка, разрешённым относительно производной.**

Определение решения дифференциального уравнения (27.2)

Решением дифференциального уравнения (27.2) на интервале (a,b) называется функция $y = y(x)$ такая, что

1) $y = y(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a,b);

2) точка $\left(x, y(x), y'(x)\right) \in D$ для любого $x \in (a,b)$;

3) $y''(x) = f\left(x, y(x), y'(x)\right)$ для любого $x \in (a,b)$.

График решения $y = y(x)$ называется **интегральной кривой** данного дифференциального уравнения.

Задача Коши дифференциального уравнения (27.2)

Задачей Коши для дифференциального уравнения (27.2) называется задача нахождения решения $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющего условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \tag{27.3}$$

где точка $(x_0, y_0, y'_0) \in D$.

Условия (27.3) называются **начальными условиями.**

Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Теорема 27.1.

Если в уравнении (27.2) функция $f(x, y, y')$ и её частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$ непрерывны в области D, то для любой точки $(x_0, y_0, y_0') \in D$ в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 существует единственное решение уравнения (27.2), удовлетворяющее начальными условиями (27.3).

Определение общего решения дифференциального уравнения (27.2)

Общим решением дифференциального уравнения (27.2) в области D называется функция $y = y(x, C_1, C_2)$, зависящая от x и двух произвольных постоянных C_1, C_2, такая, что:

1) она является решением уравнения (27.2) при любых допустимых значениях произвольных постоянных C_1, C_2;

2) для любых начальных условий (27.3) существуют единственные значения постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$ такие, что решение $y = y(x, C_1^0, C_2^0)$ удовлетворяет начальным условиям (27.3).

Определение частного решения дифференциального уравнения (27.2)

Частным решением дифференциального уравнения (27.2) в области D называется функция $y = y(x, C_1^0, C_2^0)$, которая получается из общего решения $y = y(x, C_1, C_2)$ при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$.

Определение общего и частного интеграла дифференциального уравнения (27.2)

Соотношение вида

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0, \qquad (27.4)$$

неявно задающее общее решение уравнения (27.2), называется **общим интегралом** уравнения (27.2) в области D.

Соотношение $\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$, получаемое из (27.4) при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$, называется **частным интегралом** уравнения (27.2) в области D.

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

1. Уравнение вида $y'' = f(x)$.

Общее решение $y = \int\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + C_1 x + C_2$ находят последовательным двукратным интегрированием,

где C_1, C_2 − произвольные постоянные.

2. Уравнение вида $F(x, y', y'') = 0$.

Уравнение не содержит явно неизвестной функции $y(x)$.

Порядок уравнения понижают заменой переменной $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$.

Уравнение преобразуется в уравнение первого порядка $F(x, z, z') = 0$.

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

3. Уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$.

Уравнение не содержит явно независимой переменной x.

Порядок уравнения понижают заменой переменной $y' = p(y)$, $y'' = \dfrac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,y}\,p$.

Уравнение преобразуется в уравнение первого порядка относительно новой искомой функции $p(y)$.