ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 26.1. Функция $f(x,y)$ называется ***однородной степени*** k, если для любого числа $t>0$ выполняется равенство $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$.

Например, $f(x,y)=x^2+y^2-xy$ − однородная функция второй степени, так как $f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)=t^2(x^2+y^2-xy)=t^2 f(x,y)$.

Определение 26.2. Дифференциальное уравнение

$$y'=f(x,y) \tag{26.1}$$

называется ***однородным***, если $f(x,y)$ − однородная функция нулевой степени.

Определение 26.3. Дифференциальное уравнение

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \tag{26.2}$$

называется ***однородным***, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ однородные одной и той же степени k.

Уравнения (26.1) и (26.2) с помощью подстановки

$$\frac{y}{x}=z(x),$$

где $z(x)$ − новая неизвестная функция, приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными.

Пример 26.1. Решить дифференциальное уравнение $(x-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$.

◁ Данное уравнение является однородным, так как $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции первой степени.

Пусть $\frac{y}{x}=z(x)$. Тогда $y=zx$, $\mathrm{d}y=x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x$.

Подставляя в уравнение выражения для y и $\mathrm{d}y$, получаем

$$(x-zx)\mathrm{d}x+x(x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x)=0.$$

Разделяем переменные: $\mathrm{d}z=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Отсюда интегрированием находим $z = -\ln|x| + C$,

где C − произвольная постоянная.

Заменяя z на $\dfrac{y}{x}$, получаем общее решение уравнения: $y = x(-\ln|x| + C)$.

Заметим, что при делении на x^2 было потеряно решение $x = 0$. ▷

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 26.4. Уравнение

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{26.3}$$

где заданные функции $p(x)$ и $q(x)$ определены и непрерывны на интервале (a, b), называется ***линейным*** дифференциальным уравнением первого порядка.

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение (26.3) называется ***линейным однородным*** уравнением. Оно является уравнением с разделяющимися переменными и имеет общее решение

$$y = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x},$$

где C − произвольная постоянная.

При $q(x) \not\equiv 0$ уравнение (26.3) называется ***линейным неоднородным*** дифференциальным уравнением первого порядка.

Рассмотрим один из методов решения таких уравнений – ***метод Бернулли.***

Будем искать решение уравнения (26.3) в виде $y = u(x) \cdot v(x)$,

где $u(x)$ и $v(x)$ − некоторые неизвестные функции.

Подставляя $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$ в уравнение (26.3) и группируя слагаемые, содержащие $v(x)$ (или $u(x)$), получаем

$$uv' + v\big(u' + p(x)u\big) = q(x). \tag{26.4}$$

В качестве $u(x)$ выбираем любое отличное от нуля решение уравнения

$$u' + p(x)u = 0,$$

например, $u(x) = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$.

Подставляя найденную функцию в уравнение (26.4), получаем

$$e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot v' = q(x).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$v = \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C,$$

где C − произвольная постоянная.

Следовательно, общее решение уравнения (26.3) имеет вид

$$y = u(x)\cdot v(x) = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right).$$

Пример 26.2. Решить задачу Коши

$$x^3\,\mathrm{d}y + 3yx^2\,\mathrm{d}x = 2\sin(x-1)\,\mathrm{d}x, \quad y(1) = 5.$$

◁ Преобразуем уравнение к виду

$$y' + \frac{3}{x}\,y = \frac{2\sin(x-1)}{x^3} \quad (x \neq 0).$$

Полагаем $y = u(x)\cdot v(x)$. Тогда

$$u'v + uv' + \frac{3}{x}\,uv = \frac{2\sin(x-1)}{x^3},$$

$$v\left(u' + \frac{3}{x}\,u\right) + uv' = \frac{2\sin(x-1)}{x^3}. \tag{26.5}$$

В качестве $u(x)$ возьмём любое отличное от нуля решение уравнения

$$u' + \frac{3}{x}\,u = 0,$$

например, $u = \dfrac{1}{x^3}$.

Подставляя найденную функцию в уравнение (26.5), получаем

$$v' = 2\sin(x-1).$$

Тогда

$v = \int 2\sin(x-1)\mathrm{d}x = -2\cos(x-1) + C$, где C − произвольная постоянная.

Общее решение данного линейного уравнения имеет вид

$$y = u\cdot v = \frac{C - 2\cos(x-1)}{x^3}.$$

Из начального условия $y(1)=5$ вычисляем $C=7$.

Итак, искомое частное решение $y=\dfrac{7-2\cos(x-1)}{x^3}$. ▷

Уравнение Бернулли

Определение 26.5. Уравнение вида

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^n \quad (\, n\neq 0,\ n\neq 1) \tag{26.6}$$

называется ***уравнением Бернулли.***

При $n=0$ дифференциальное уравнение (26.6) − линейное,

а при $n=1$ − с разделяющимися переменными.

Решение уравнения Бернулли можно также искать в виде $y=u(x)\cdot v(x)$.

Заметим, что при $n>0$ функция $y(x)\equiv 0$ является решением уравнения Бернулли.