ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Определение функции однородной степени *k*.

Функция $f(x,y)$ называется **однородной степени *k***, если для любого числа $t>0$ выполняется равенство $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$.

Определения однородного дифференциального уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{26.1}$$

называется **однородным**, если $f(x,y)$ − однородная функция нулевой степени.

Дифференциальное уравнение

$$\mathbf{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0} \tag{26.2}$$

называется **однородным**, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ однородные одной и той же степени k.

Способ решения однородного дифференциального уравнения первого порядка

Уравнения (26.1) и (26.2) с помощью подстановки

$$y/x = z(x),$$

где $z(x)$ – новая неизвестная функция, приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными.

Определение линейного дифференциального уравнения первого порядка

Уравнение

$$y' + p(x)\,y = q(x), \qquad (26.3)$$

где заданные функции $p(x)$ и $q(x)$ определены и непрерывны на интервале (a,b), называется **линейным** дифференциальным уравнением первого порядка.

Определения линейного однородного и неоднородного дифференциальных уравнений первого порядка

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение (26.3) называется **линейным однородным** уравнением.

При $q(x) \not\equiv 0$ уравнение (26.3) называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением первого порядка.

Способы решений линейного однородного и неоднородного дифференциальных уравнений первого порядка

Линейное однородное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и имеет общее решение

$$y = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x},$$

где C − произвольная постоянная.

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка имеет вид

$$\boldsymbol{y = u(x) \cdot v(x),}$$

где $u(x)$ и $v(x)$ − некоторые неизвестные функции.

Алгоритм решения линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка

1) Подставляем $y = uv$, $y' = uv' + u'v$ в уравнение (26.3).

2) Группируем слагаемые, содержащие $v(x)$ (или $u(x)$).

3) Получаем

$$uv' + v\left(u' + p(x)u\right) = q(x). \tag{26.4}$$

4) В качестве $u(x)$ выбираем любое отличное от нуля решение уравнения

$$u' + p(x)u = 0,$$

например, $u(x) = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$.

Алгоритм решения линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка

5) Подставляем найденную функцию в уравнение (26.4).

6) Получаем $e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot v'=q(x)$ − уравнение с разделяющимися переменными.

7) Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$v=\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C,$$

где C − произвольная постоянная.

8) Общее решение уравнения (26.3) имеет вид

$$y=u(x)\cdot v(x)=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right).$$

Определение и решение уравнения Бернулли

Уравнение вида

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^{n}, \quad (n \neq 0, \; n \neq 1), \qquad (26.6)$$

называется **уравнением Бернулли.**

При $n = 0$ дифференциальное уравнение (26.6) − линейное,

при $n = 1$ − с разделяющимися переменными.

Решение уравнения Бернулли можно также искать в виде $y = u(x) \cdot v(x)$.

Замечание. При $n > 0$ функция $y(x) \equiv 0$ является решением уравнения Бернулли.