# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

## Основные понятия.

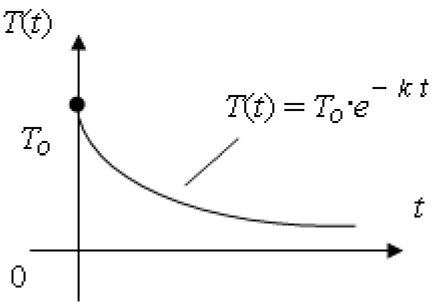
## Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Многие задачи науки и техники приводятся к дифференциальным уравнениям. Рассмотрим одну из таких задач. Пусть тело, имеющее температуру $T_0 > 0$ в момент времени $t = 0$, помещено в среду, температура которой равна нулю. Найдём закон, по которому изменяется температура тела в зависимости от времени.

Пусть эта искомая температура – функция $T(t)$. Известно, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Учитывая, что функция $T(t)$ убывающая, в силу механического смысла производной получим

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = -kT(t), \tag{25.1}$$

где $k$ - коэффициент пропорциональности.




Полученное соотношение является математической моделью рассматриваемого физического процесса. Оно называется *дифференциальным уравнением*, так как наряду с неизвестной функцией $T(t)$ в него входит и её производная. Заметим, что решением уравнения (25.1) будет функция $T(t) = Ce^{-kt}$, где $C$ − произвольная постоянная. Значение этой постоянной можно вычислить из условия $T(0) = T_0 \Rightarrow C = T_0$. Искомое решение $T(t) = T_0 e^{-kt}$.

Дифференциальное уравнение (25.1) может описывать и другие физические процессы.

**Определение 25.1.** Уравнение

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

где $x$ - независимая переменная, $y = y(x)$ - искомая функция, $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ $(n \geq 1)$ - её производные, функция $F$ определена и непрерывна в некоторой области $\Omega \subset R^{n+2}$, называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением*** $n$ ***- го порядка.***

Примеры обыкновенных дифференциальных уравнений:

$y^{(4)} - 2y'' + y = \cos x$ - уравнение четвёртого порядка;

$y \ln y'' + \dfrac{x^3}{y} = 0$ - уравнение второго порядка;

$y' \sin x + x^2 y^2 - \cos y' = 0$ - уравнение первого порядка.

**Определение 25.2.** Уравнение

$$F\left(x, y, y'\right) = 0, \qquad (25.2)$$

где $x$ − независимая переменная, $y = y(x)$ − искомая функция, $y'$ − её производная, функция $F$ определена и непрерывна в некоторой области $G \subset R^3$, называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка.***

**Определение 25.3.** Уравнение

$$y' = f(x, y), \qquad (25.3)$$

где функция $f$ определена и непрерывна в некоторой области $D \subset R^2$, называется ***дифференциальным уравнением первого порядка, разрешённым относительно производной.***

В некоторых случаях уравнение (25.3) удобно записать в виде $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ или в виде $f(x, y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$. Это частный случай более общего уравнения

$$P\left(x, y\right)\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad (25.4)$$

с непрерывными в некоторой области $\Omega \subset R^2$ функциями $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Переменные $x$ и $y$ в нём равноправны.

**Определение 25.4.** ***Решением дифференциального уравнения*** (25.3) на интервале $(a, b)$ называется функция $y = y(x)$ такая, что

1) она имеет производную на интервале $(a, b)$;
2) точка $(x, y(x)) \in D$ для любого $x \in (a, b)$;
3) $y'(x) = f(x, y(x))$ для любого $x \in (a, b)$.

График решения $y = y(x)$ называется ***интегральной кривой*** данного дифференциального уравнения.

***Задачей Коши*** для дифференциального уравнения (25.3) называется задача нахождения решения $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющего условию

$$y(x_0) = y_0, \tag{25.5}$$

где точка $(x_0, y_0) \in D$.

Условие (25.5) называется ***начальным условием***.

С геометрической точки зрения, решить задачу Коши – значит найти решение $y = y(x)$ уравнения (25.3), график которого проходит через точку $(x_0, y_0) \in D$.

**Теорема 25.1.** (***существования и единственности решения задачи Коши***) Если в уравнении (25.3) функция $f(x, y)$ и её частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в области $D$, то для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки $x_0$ существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (25.3), удовлетворяющее начальному условию (25.5).

Геометрически это означает, что через каждую точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит только одна интегральная кривая.

**Определение 25.5.** ***Общим решением*** дифференциального уравнения (25.3) в области $D$ называется функция $y = y(x, C)$, зависящая от $x$ и произвольной постоянной $C$, такая, что: 1) она является решением уравнения (25.3) при любом допустимом значении постоянной $C$; 2) для любого начального условия (25.5) существует единственное значение $C = C_0$, при котором решение $y = y(x, C_0)$ удовлетворяет начальному условию (25.5).

**Определение 25.6.** ***Частным решением*** дифференциального уравнения (25.3) в области $D$ называется функция $y = y(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = y(x, C)$ при определённом значении постоянной $C = C_0$.

**Определение 25.7.** Соотношение вида

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{25.6}$$

неявно задающее общее решение уравнения (25.3), называется ***общим интегралом*** уравнения (25.3) в области $D$.

**Определение 25.8.** Соотношение $\Phi(x, y, C_0) = 0$, получаемое из (25.6) при определённом значении постоянной $C = C_0$, называется ***частным интегралом*** уравнения (25.3) в области $D$.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется ***интегрированием*** дифференциального уравнения.

## Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

**Определение 25.9.** Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с ***разделяющимися переменными***, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в (25.4) можно записать в виде произведения двух множителей, каждый из которых является функцией одного аргумента, т.е.

$$P_1(x) \cdot P_2(y)\,\mathrm{d}x + Q_1(x) \cdot Q_2(y)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{25.7}$$

Разделим обе части этого уравнения на $Q_1(x) \cdot P_2(y)$, предполагая, что $Q_1(x) \cdot P_2(y) \neq 0$. Получим уравнение с ***разделёнными переменными***

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,\mathrm{d}\,x+\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\,\mathrm{d}\,y=0\,.$$

Интегрируя обе части этого уравнения, найдём общий интеграл

$$\int\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,\mathrm{d}\,x+\int\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\,\mathrm{d}\,y=C\,,$$

где $C$ − произвольная постоянная.

***Замечание.*** Деление на $Q_1(x)\cdot P_2(y)$ может привести к потере решений, обращающих в нуль произведение $Q_1(x)\cdot P_2(y)$, что следует проверять.

Уравнение $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$ также сводится к уравнению с разделёнными переменными:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{f_2(y)}=f_1(x)\mathrm{d}\,x\,,\qquad f_2(y)\neq 0\,,$$

общий интеграл которого $\int\frac{\mathrm{d}\,y}{f_2(y)}=\int f_1(x)\mathrm{d}\,x+C\,,$

где $C$ − произвольная постоянная.

***Замечание.*** При делении обеих частей уравнения на $f_2(y)$ решение $y(x)=y_0$, где $y_0$ − корень уравнения $f_2(y)=0,$ может быть потеряно.

**Пример 25.1.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1+x^2)\,y\,y'=x^2\cdot\sqrt{y^2-1}\,.$$

◁ Так как $y'=\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$, то $(1+x^2)y\,\mathrm{d}\,y=x^2\cdot\sqrt{y^2-1}\;\mathrm{d}\,x$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Разделяем переменные, считая $(1+x^2)\cdot\sqrt{y^2-1}\neq 0$:

$$\frac{y\,\mathrm{d}\,y}{\sqrt{y^2-1}}=\frac{x^2\,\mathrm{d}\,x}{1+x^2}\,.$$

Интегрируя, получаем общий интеграл $\sqrt{y^2-1}=x-arctg\;x+C\,,$

где $C$ - произвольная постоянная.

Откуда $y = \pm\sqrt{(x - \operatorname{arctg} x + C)^2 + 1}$ – общее решение.

При разделении переменных были потеряны решения $y = \pm 1$. ▷