ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнение $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$, где x − независимая переменная, $y = y(x)$ − искомая функция, $y', y'', ..., y^{(n)}$ $(n \geq 1)$ − её производные, функция F определена и непрерывна в некоторой области $\Omega \subset R^{n+2}$, называется **обыкновенным дифференциальным уравнением *n*-го порядка.**

Примеры обыкновенных дифференциальных уравнений:

$y^{(4)} - 2y'' + y = \cos x$ − уравнение четвёртого порядка,

$y \ln y'' + \dfrac{x^3}{y} = 0$ − уравнение второго порядка,

$y' \sin x + x^2 y^2 - \cos y' = 0$ − уравнение первого порядка.

Определение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Уравнение

$$\boldsymbol{F(x, y, y') = 0}, \qquad (25.2)$$

где x − независимая переменная,

$y = y(x)$ − искомая функция,

y' − её производная,

функция F определена и непрерывна в некоторой области $G \subset R^3$, называется **обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка.**

Определение дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной

Уравнение

$$y' = f(x, y), \qquad (25.3)$$

где функция f определена и непрерывна в некоторой области $D \subset R^2$, называется **дифференциальным уравнением первого порядка, разрешённым относительно производной.**

Определение решения дифференциального уравнения

Решением дифференциального уравнения (25.3) на интервале (a,b) называется функция $y = y(x)$ такая, что

1) она имеет производную на интервале (a,b);

2) точка $(x, y(x)) \in D$ для любого $x \in (a,b)$;

3) $y'(x) = f(x, y(x))$ для любого $x \in (a,b)$.

График решения $y = y(x)$ называется **интегральной кривой** данного дифференциального уравнения.

Задача Коши

Задачей Коши для дифференциального уравнения (25.3) называется задача нахождения решения $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющего условию

$$y(x_0) = y_0, \tag{25.5}$$

где точка $(x_0, y_0) \in D$.

Условие (25.5) называется **начальным условием.**

С геометрической точки зрения, решить задачу Коши – значит найти решение $y = y(x)$ уравнения (25.3), график которого проходит через точку $(x_0, y_0) \in D$.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Теорема 25.1.

Если в уравнении (25.3) функция $f(x, y)$ и её частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в области D, то для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (25.3), удовлетворяющее начальному условию (25.5).

Определение общего решения дифференциального уравнения

Общим решением дифференциального уравнения (25.3) в области D называется функция $\boldsymbol{y = y(x, C)}$, зависящая от x и произвольной постоянной C, такая, что:

1) она является решением уравнения (25.3) при любом допустимом значении постоянной C;

2) для любого начального условия (25.5) существует единственное значение $C = C_0$, при котором решение $y = y(x, C_0)$ удовлетворяет начальному условию (25.5).

Определение частного решения дифференциального уравнения

Частным решением дифференциального уравнения (25.3) в области D называется функция $\boldsymbol{y = y(x,\ C_0)}$, которая получается из общего решения $y = y(x, C)$ при определённом значении постоянной $C = C_o$.

Общий интеграл дифференциального уравнения

Соотношение вида

$$\boldsymbol{\Phi(x, y, C) = 0}, \tag{25.6}$$

неявно задающее общее решение уравнения (25.3), называется **общим интегралом** уравнения (25.3) в области D.

Частный интеграл дифференциального уравнения

Соотношение **$\Phi(x,\ y,\ C_0) = 0$**, получаемое из (25.6) при определённом значении постоянной $C = C_0$, называется **частным интегралом** уравнения (25.3) в области D.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется **интегрированием** дифференциального уравнения.

Определение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Уравнение вида

$$\mathbf{P_1(x) \cdot P_2(y)dx + Q_1(x) \cdot Q_2(y)dy = 0}, \qquad (25.7)$$

в котором коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y, называется **дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.**

Замечание. Деление обоих слагаемых уравнения (25.7) на $Q_1(x) \cdot P_2(y)$ может привести к потере решений, обращающих в нуль произведение $Q_1(x) \cdot P_2(y)$, что следует проверять.