ЛЕКЦИЯ 24

ТЕМА: ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

24.1. Приложения определенного интеграла.

Вычисление площади плоской фигуры

1. Если $f(x) \ge g(x)$ при $x \in [a;b]$, то площадь фигуры (рис. 24.1), ограниченной кривыми $y = f(x)$, $y = g(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, находится по формуле

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx.$$

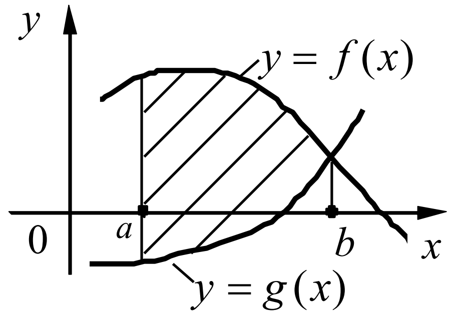

Рис. 24.1.

2. Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t) \ge 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a;b]$ оси Ox, выражается, формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt, \qquad (24.1)$$

где t_1, t_2 определяются из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$ и $x(t)$ – монотонная функция на $[t_1;t_2]$, имеющая непрерывную производную $x'(t)$.

3. Площадь криволинейного сектора (рис. 24.2), ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, и двумя полярными лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, выражается интегралом

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi,$$

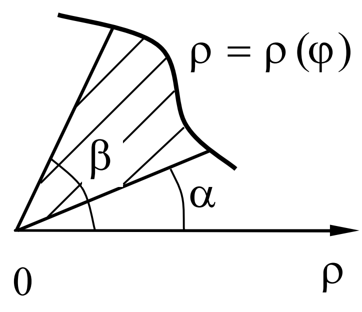

Рис. 24.2.

где $\rho(\varphi)$ – непрерывная функция на $[\alpha;\beta]$.

24.2. Вычисление работы и других физических величин с помощью определенного интеграла

1. Если непрерывная переменная сила $\vec{F}$ действует в направлении оси Ox, то работа силы на отрезке $[a;b]$ выражается интегралом

$$A = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad (24.2)$$

где $f(x) = \left|\vec{F}(x)\right|$.

Приведем вывод формулы (24.2).

$\triangleleft$ Пусть под действием силы $\vec{F}$ материальная точка M движется по прямой Ox, причем направление силы совпадает с направлением движения. Требуется найти работу, произведенную силой $\vec{F}$ при перемещении точки M из положения $x = a$ в положение $x = b$.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n произвольных частей с длинами $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$. Затем в каждом частичном отрезке Δx_i выберем произвольную точку ξ_i и заменим работу силы $\vec{F}(x)$ на пути $\Delta x_i\,(i = 1,2,...,n)$ её приближенным значением $f(\xi_i)\,\Delta x_i$, $f(x) = \left|\vec{F}(x)\right|$.

Тогда сумма $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ будет приближенным выражением работы силы $\vec{F}(x)$ на всем отрезке $[a;b]$.

A_n – представляет собой интегральную сумму, составленную для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Предел этой суммы при $\max\limits_i (\Delta x_i) \to 0$ существует и выражает работу силы $\vec{F}(x)$ на пути от точки $x = a$ до точки $x = b$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx. \ \triangleright$$

Замечание. При решении аналогичных задач с применением определенного интеграла, обычно не составляют интегральную сумму (A_n) по условию задачи, а находят элемент (dA) интересующей нас величины (A), являющейся функцией некоторой переменной (x). После этого путем интегрирования, т.е. суммирования в широком смысле слова (суммирования с предельным переходом) непрерывно распределенной на $[a;b]$ величины (dA), получают искомое значение (A).

2. Закон **Кулона**: модуль силы электрического взаимодействия между двумя точечными электрическими зарядами q_1 и q_2 прямо пропорционален произведению величин зарядов и обратно пропорционален квадрату расстояния между ними. В скалярной форме этот закон запишется так

$$\left|\vec{F}\right| = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}, \qquad (24.3)$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды, в которой происходит взаимодействие, и выбранной системы единиц измерения.

Если заряды одноименные ($q_1 \cdot q_2 > 0$), то это соответствует их взаимному отталкиванию, если заряды разноименные ($q_1 \cdot q_2 < 0$), то это соответствует их взаимному притяжению.

Замечание. Закон Кулона справедлив для взаимодействия не только точечных зарядов, но и тел шарообразной формы, если заряды q_1 и q_2 распределены равномерно по объему и поверхности этих тел.

3. Для постоянного тока количество тепла, выделенного проводником в единицу времени, определяется законом Джоуля - Ленца

$$Q = 0{,}24 \cdot I^2 \cdot R, \qquad (24.4)$$

где I – сила тока; R – сопротивление.

Если $I = I(t)$, то за промежуток времени $\left[t_1;t_2\right]$

$$Q = 0{,}24 \int_{t_1}^{t_2} I^2(t) \cdot R\,dt.$$

Замечание. При решении прикладных задач все данные необходимо приводить к единой системе (отсчета и размерностей).

24.3. Длина дуги плоской кривой

1. Если функция $y = f(x)$ – непрерывно-дифференцируемая на отрезке $[a;b]$, то длина дуги кривой $y = f(x)$, заключенной между точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx. \qquad (24.5)$$

2. Если кривая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [t_1; t_2]$, где $x(t)$, $y(t)$ – непрерывно-дифференцируемые функции, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$L = \int_{t_2}^{t_1} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt. \qquad (24.6)$$

3. Если кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, то длина дуги кривой, соответствующей монотонному изменению полярного угла от $\varphi_1 = \alpha$ до $\varphi_2 = \beta$, где $\alpha < \beta$, находится по формуле

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi, \qquad (24.7)$$

где $\rho(\varphi)$ – непрерывно-дифференцируемая функция.

24.4. Объем тела вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой (например, $y = y(x)$), осью аргумента и двумя ей перпендикулярными прямыми (например, $x = a$ и $x = b$, $a < b$), вычисляется по формуле

$$V_{вр.x} = \pi \int_a^b y^2(x)\, dx \quad \text{(при вращении вокруг оси } Ox\text{);} \qquad (24.8)$$

$$V_{вр.y} = \pi \int_c^d x^2(y)\, dy \quad \text{(при вращении вокруг оси } Oy\text{).} \qquad (24.9)$$