ЛЕКЦИЯ 23

ТЕМА: ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

23.1. Правила вычисления определенного интеграла

23.1.1. Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (23.1)$$

где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

Следует отметить, что формула Ньютона – Лейбница (23.1) дает практически удобный метод вычисления определенных интегралов в том случае, когда известна первообразная подынтегральной функции. Она значительно расширила область применения определенного интеграла в технике, физике, механике и т.д.

Замечание. Формула (23.1) применяется для вычисления определенного интеграла от непрерывной на $[a;b]$ функции $f(x)$, лишь тогда, когда равенство $F'(x) = f(x)$ выполняется на всем отрезке $[a;b]$, т.е. первообразная $F(x)$ является непрерывно-дифференцируемой функцией на всем отрезке $[a;b]$. Использование в качестве первообразной разрывной функции может привести к неверному результату.

Пример 1. Найти ошибку при следующем вычислении интеграла

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} arctg \frac{2x}{1-x^2}\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(arctg\left(-\sqrt{3}\right) - arctg\,0\right) = -\frac{\pi}{6},$$

где $\left(\dfrac{1}{2} arctg \dfrac{2x}{1-x^2}\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(x \neq 1)$.

◁ Результат неверный: интеграл от всюду положительной функции оказался отрицательным. Ошибка произошла из-за того, что функция

$\frac{1}{2}arctg\frac{2x}{1-x^2}$ в точке $x=1$, содержащейся на отрезке интегрирования, терпит разрыв первого рода, т.к.

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{2}arctg\frac{2x}{1-x^2}=\frac{\pi}{4};\quad \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{2}arctg\frac{2x}{1-x^2}=-\frac{\pi}{4}.$$

Правильное значение интеграла равно

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=arctg\,x\Big|_0^{\sqrt{3}}=arctg\sqrt{3}-arctg\,0=\frac{\pi}{3}.$$

Здесь формула Ньютона – Лейбница (23.1) применима, так как функция $F(x)=arctg\,x$ непрерывна на отрезке $\left[0;\sqrt{3}\right]$ и равенство $F'(x)=f(x)$ выполняется на всем этом отрезке. $\rhd$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx$.

$\lhd$ Так как $\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}=\sqrt{\frac{2\cos^2 x}{2}}=|\cos x|$, то

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(-\cos x)\,dx=$$

$=\sin x\Big|_0^{\pi/2}+(-\sin x)\Big|_{\pi/2}^{\pi}=(1-0)+(0-(-1))=2$ (использовали свойство 1 определенного интеграла и определение модуля $|a|=\begin{cases}a, \text{ если } a\ge 0,\\ -a, \text{ если } a<0.\end{cases}$). $\rhd$

Замечание. Если не обратить внимание на то, что $\cos x \le 0$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ и положить $\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \cos x$, то получим неверный результат $\int\limits_0^{\pi} \cos x \, d\,x = \sin x \Big|_0^{\pi} = 0$. ▷

23.1.2. Замена переменной в определенном интеграле

Если $x = \varphi(t)$ – непрерывно-дифференцируемая монотонная функция на отрезке $\alpha \le t \le \beta$, причем $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ и $f(\varphi(t))$ – функция непрерывная на $[\alpha;\beta]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. (23.2)

Замечание. При вычислении определенного интеграла по формуле (23.2) не надо возвращаться к старой переменной, так как интеграл, полученный после замены переменной, равен тому же числу, что и интеграл, стоящий слева в формуле (23.2).

23.1.3. Интегрирование по частям в определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\,du(x), \qquad (23.3)$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – непрерывно-дифференцируемые функции на $[a;b]$.

◁ Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывно-дифференцируемые функции на $[a;b]$. Тогда $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$.

Интегрирую обе части тождества в пределах от a до b, получим

$$\int\limits_a^b (u\,v)'dx = \int\limits_a^b u'v\,dx + \int\limits_a^b u\,v'\,dx. \qquad (23.4)$$

Так как $\int (u\,v)'\,dx = u\,v + C$, то $\int\limits_a^b (u\,v)'\,dx = u\,v\Big|_a^b$.

Поэтому равенство (23.4) принимает вид

$$u(x)\,v(x)\Big|_a^b = \int\limits_a^b v(x)\,du(x) + \int\limits_a^b u(x)\,dv(x),$$

или окончательно

$$\int\limits_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\,du(x). \ \rhd$$

Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть $y = f(x)$ функция, непрерывная на отрезке $[a,\ b]$. Положим

$$I(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt,\ x \in (a,\ b).$$

Теорема. Функция $I(x)$ является первообразной для $f(x)$: $I'(x) = f(x)$.

23.1.4. Несобственные интегралы с бесконечными пределами (1-го рода)

Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x \geq a$ и интегрируема на любом отрезке $[a;b]$. Тогда $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *несобственным интегралом* от $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Аналогично определяются несобственные интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx; \quad \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{c}^{b} f(x)\,dx.$$

Если приведенные пределы существуют, то соответствующие несобственные интегралы 1-го рода называются ***сходящимися***. В противном случае интегралы называются ***расходящимися***.

23.1.5. Несобственные интегралы от неограниченных функций (2-го рода)

Если функция $f(x)$ определена при $a \le x < b$, интегрируема на любом отрезке $[a;\, b-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<b-a$ и неограничена слева в точке b при $x\to b-0$, то по определению полагают

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

и называют *несобственным интегралом 2-го рода.*

Если этот предел существует, то несобственный интеграл называется ***сходящимся***. В противном случае интеграл называется ***расходящимся***.

Аналогично, если функция $f(x)$ неограничена справа в точке a при $x\to a+0$, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ в окрестности внутренней точки c отрезка $[a;b]$ неограниченна, то по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

причем, если несобственные интегралы 2-го рода справа сходятся, то и интеграл слева называется сходящимся.