ЛЕКЦИЯ 22

ТЕМА: ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

22.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и неотрицательна. Назовем ***криволинейной трапецией*** часть плоскости, ограниченную линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$ (рис. 22.1).

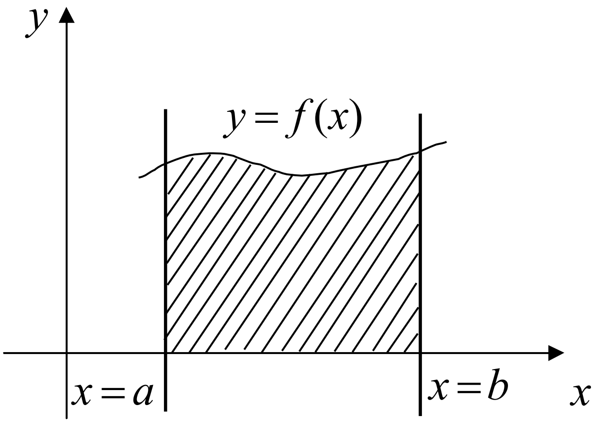

Рис. 22.1

Пусть требуется найти площадь криволинейной трапеции. Разобьем криволинейную трапецию на элементарные части прямыми, проходящими через точки $(x_k, 0)$ параллельно оси Oy, где $x_0 = a$, $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ (рис. 22.2).

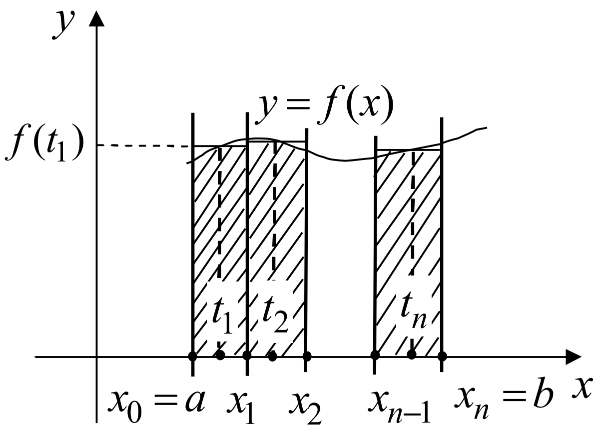

Рис. 22.2

На каждом из элементарных отрезков $\left[x_{k-1},\ x_k\right]$ выберем произвольную точку t_k, $k=\overline{1,n}$ и заменим приближенно площадь элементарной части трапеции площадью прямоугольника с измерениями $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $f(t_k)$. Тогда, очевидно, $S \approx \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$.

Точное значение площади получим, если рассмотреть предел:

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k,\ \lambda = наиб\left(\Delta x_k\right). \qquad (22.1)$$

22.2. Задача о массе прямолинейного стержня

Пусть прямолинейный стержень расположен на отрезке $[a,\ b]$ оси Ox и известна плотность распределения масс $\rho(x)$ в каждой точке $x\in[a,\ b]$. Требуется найти массу стрежня.

Разобьем стержень на столь малые элементарные части $\left[x_{k-1},\ x_k\right]$, $k=\overline{1,n}$, что на каждой из этих элементарных частей плотность приблизительно постоянна и равна значению $\rho(t_k)$, где t_k — произвольно выбранная на $\left[x_{k-1},\ x_k\right]$ точка, $k=\overline{1,n}$. Тогда приближенное значение массы стержня $M \approx \sum_{k=1}^{n}\rho(t_k)\Delta x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Точное значение массы получим, если рассмотреть предел:

$$M = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(t_k)\Delta x_k,\ \lambda = наиб\left(\Delta x_k\right). \qquad (22.2)$$

Задачи, подобные приведенным выше, сводящиеся к вычислению пределов (22.1) и (22.2), весьма многочисленны и встречаются в самых разных отраслях науки и техники. В связи с этим дадим следующее общее определение, включающее в себя решения задач (22.1), (22.2) как частные случаи.

22.3. Понятие определенного интеграла. Основные его свойства и правила вычисления

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Разделим отрезок $[a;b]$ на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ и выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1};x_k]$ произвольную точку ξ_k. Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Сумма вида

$$f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \quad (22.3)$$

называется ***интегральной суммой*** на отрезке $[a;b]$ для функции $f(x)$.

Величина интегральной суммы (22.3) зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на части и от выбора точек ξ_k на частичных отрезках.

Обозначим $\lambda = \max\limits_k \Delta x_k$.

Определение. Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ при $\lambda = \max\limits_k \Delta x_k \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на части Δx_k, ни от выбора точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на $[a;b]$, а сам предел называется *определенным интегралом Римана* от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \,. \quad (22.4)$$

Число a называется нижним пределом интеграла, b – верхним пределом интеграла. Отрезок $[a;b]$ называется отрезком интегрирования, x – переменной интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)\,dx$ – подынтегральным выражением.

Справедлива следующая важная теорема.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Отметим, что среди разрывных функций есть как интегрируемые так и не интегрируемые.

Замечание 1. Определенный интеграл зависит только от вида функции $f(x)$ и пределов интегрирования, но не от переменной интегрирования, которую можно обозначить любой буквой.

Замечание 2. При введении понятия определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ мы предполагаем, что $a<b$. В случае $b<a$ примем по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$.

Замечание 3. Если $a=b$, то полагаем по определению, что для любой функции $f(x)$ имеет место $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

22.2. Основные свойства определенного интеграла

Для функций $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, непрерывных на соответствующих промежутках интегрирования, выполняется:

1. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.
2. $\int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]\,dx = k_1\int_a^b f_1(x)\,dx + k_2\int_a^b f_2(x)\,dx$,

где k_1, k_2 – постоянные.

3. Если $f(x)$ – нечетная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.
4. Если $f(x)$ – четная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
5. Если $f_1(x) \ge f_2(x)$ $\forall x \in [a;b]$, то $\int_a^b f_1(x)\,dx \ge \int_a^b f_2(x)\,dx$.

6. $\exists \xi \in [a;b]$ такое, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(\xi)$,

где $f(\xi)$ называется средним значением функции $f(x)$ на $[a;b]$.

7. $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$.

8. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и $a \le b$, то

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

9. Если $(a \le b)$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$,

а если a и b произвольные числа, то

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \left|\int\limits_a^b |f(x)|\,dx\right|.$$

Замечание 4. Интегрируемость $f(x)$ на $[a;b]$ влечет за собой интегрируемость $|f(x)|$ на $[a;b]$. Обратное утверждение неверно.

Например, функция

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1, \textit{ для рациональных } x, \\ -1, \textit{для иррациональных } x \end{cases}$$

не интегрируемая на $[a;b]$, а $|\Psi(x)| = 1$ на $[a;b]$ есть интегрируемая на $[a;b]$ функция.