Лекция 21.

Тема: НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

21.1. Интегрирование рациональных дробей и некоторых иррациональных выражений (продолжение)

Приведем метод интегрирования рациональной дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Если дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – неправильная, т.е. $m \ge n$, то сначала выделяют целую часть, т.е. представляют ее в виде $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_{m-n}(x) + \dfrac{R_k(x)}{Q_n(x)}$, где $M_{m-n}(x)$ – многочлен степени $m-n$, а $\dfrac{R_k(x)}{Q_n(x)}$ – правильная дробь. Выделение целой части производят с помощью деления $P_m(x)$ на $Q_n(x)$ "уголком". Затем разлагают знаменатель полученной правильной дроби $\dfrac{R_k(x)}{Q_n(x)}$ на простейшие множители с действительными коэффициентами

$$Q_n\left(x\right) = Q_n\left(x-a_1\right)^{l_1} \ldots \left(x-a_r\right)^{l_r} \cdot \left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\nu_1} \ldots \left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\nu_s}. \quad (21.1)$$

Теорема. Пусть знаменатель правильной рациональной дроби разложен по формуле (21.1) с действительными коэффициентами. Тогда правильную дробь $\dfrac{R_k\left(x\right)}{Q_n\left(x\right)}$ можно представить и притом единственным образом в виде суммы простейших дробей типа I, II, III, IV по следующему правилу:

а) каждому действительному корню a_i кратности l_i соответствует сумма l_i дробей:

$$\frac{A_1}{x-a_i} + \frac{A_2}{\left(x-a_i\right)^2} + \frac{A_3}{\left(x-a_i\right)^3} + \ldots + \frac{A_{l_i}}{\left(x-a_i\right)^{l_i}};$$

в) каждому множителю в (6.3) вида $\left(x^2+p_ix+q_i\right)^{\nu_i}$ соответствует сумма ν_i дробей:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_ix+q_i}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+p_ix+q_i\right)^2}+\frac{B_3x+C_3}{\left(x^2+p_ix+q_i\right)^3}+\ldots+\frac{B_{\nu_i}x+C_{\nu_i}}{\left(x^2+p_ix+q_i\right)^{\nu_i}}.$$

Методы определения коэффициентов продемонстрируем на примере.

Найти интеграл $I=\int\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}dx.$

$\triangleleft$ Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь. Все корни знаменателя действительные и простые, поэтому подынтегральная функция представится в виде суммы трех простейших дробей вида

$$\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4}+\frac{D}{x-1},$$

где $A,\ B, D$ – коэффициенты, подлежащие определению. Приводя дроби к общему знаменателю и отбрасывая его, получим тождество

$$15x^2-4x-81=A(x+4)(x-1)+B(x-3)(x-1)+D(x-3)(x+4). \quad (21.2)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества, получим систему уравнений для определения коэффициентов

$$\begin{cases} A+B+D=15, \\ 3A-4B+D=-4, \\ -4A+3B-12D=-81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2A+5B=19, \\ 8A+15B=99 \end{cases} \Rightarrow B=5, \quad A=3, \quad D=7.$$

Следовательно,

$$I=3\int\frac{dx}{x-3}+5\int\frac{dx}{x+4}+7\int\frac{dx}{x-1}=3\ln|x-3|+5\ln|x+4|+7\ln|x-1|+C=$$

$$=\ln\left|(x-3)^3(x+4)^5(x-1)^7\right|+C.$$

Замечание 1. На этом же примере покажем применение метода частных значений.

Тождество (21.2) справедливо при любом значении x. Поэтому, задав три каких-нибудь частных значения, получим три уравнения для определения трех неопределенных коэффициентов A, B и D. Удобнее всего в качестве значений x выбирать корни знаменателя подынтегральной функции, так как они обращают в нуль часть сомножителей. Полагая в тождестве (21.2) последовательно $x=3$, $x=-4$ и $x=1$, получим $A=3$, $B=5$ и $D=7$. $\triangleright$

Замечание 2. Некоторые типы интегралов от алгебраических иррациональностей надлежащей заменой переменной могут быть сведены к интегралам от рациональных функций: такое преобразование интеграла принято называть его рационализацией.

Например, интегралы вида

$$\int R\left(x,\ x^{\frac{m_1}{n_1}},\ x^{\frac{m_2}{n_2}}, ...,\ x^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx,$$

где R – рациональная функция, $m_1, m_2, ..., m_k, n_1, n_2, ..., n_k$ – целые числа, причем $n_i \neq 0, i = 1, 2, ..., k$, преобразуются в интегралы от рациональных дробей с помощью подстановки $t = \sqrt[n]{x}$, где n – наименьшее общее кратное знаменателей $n_1, n_2, ..., n_k$.

21.2. Интегрирование тригонометрических функций

При интегрировании рациональных функций от синуса и косинуса одного аргумента применяют универсальную тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. При этом, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ и интеграл сводится к интегралу от рациональной функции переменной t.

Однако универсальная подстановка нередко приводит к интегрированию сложных рациональных дробей. Перечислим некоторые частные случаи интегралов от тригонометрических функций, для интегрирования которых удобнее применять другие подстановки.

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx,$ где R – рациональная функция, удовлетворяющая условию

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

подстановкой $\cos x = t$ сводится к интегралу от рациональной функции переменной t.

Утверждение 2. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R – рациональная функция, удовлетворяющая условию

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

подстановкой $\sin x = t$ сводится к интегралу от рациональной функции переменной t.

Утверждение 3. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где $R-$ рациональная функция, удовлетворяющая условию
$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$,
подстановкой $\operatorname{tg} x = t$ сводится к интегралу от рациональной функции переменной t.

При этом $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$.

Утверждение 4. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx\,dx$, $\int \cos mx \cos nx\,dx$, $\int \sin mx \sin nx\,dx$ легко находятся с использованием формул:

$$\sin mx\ \cos nx = \frac{1}{2}\big(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\big),$$

$$\cos mx\ \cos nx = \frac{1}{2}\big(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\big),$$

$$\sin mx\ \sin nx = \frac{1}{2}\big(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\big).$$

Замечание. Интегралы $\int \cos^n x \sin^m x\,dx$, где $n = \mathrm{const}$, $m = \mathrm{const}$ – натуральные четные числа или 0 сравнительно просто вычисляются с использованием (возможно многократным) формул:

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}, \quad \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}, \quad \sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin 2t.$$

В частности, указанный прием применяют к нахождению интегралов

$$\int \sin^k x\,dx, \ \int \cos^k x\,dx,$$

где $k-$ натуральное четное число.