Лекция 20.

Тема: НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

20.1. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т.е. подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (в случае "удачной" подстановки). Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)\,dx$. Сделаем подстановку $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $dx=\varphi'(t)dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования получаем формулу интегрирования подстановкой

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (20.1)$$

Эта формула называется также формулой замены переменной в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла в правой части этого равенства следует перейти от новой переменной t к переменной x.

Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде $t=\varphi(x)$, тогда

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int f(t)dt \qquad (20.2)$$

Например, $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$. Обозначим $\ln x=u \Rightarrow du=\frac{dx}{x}$ и интеграл принимает вид:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C=\frac{\ln^3 x}{3}+C.$$

Здесь использовали табличный интеграл 2.

Замечание. Равенство (20.1) ((20.2)) утверждает, что левая его часть тождественно равна правой, если сделать подстановку $x=\varphi(t)$ и подобрать соответствующую константу C.

20.2. Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям служит для интегрирования некоторых произведений и осуществляется по формуле

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,, \qquad (20.3)$$

где $u(x)$, $v(x)$ – непрерывно-дифференцируемые функции.

Докажем эту формулу.

Так как по свойству дифференциала:

$$d(uv) = udv + vdu\,, \quad \text{или } udv = d(uv) - vdu\,.$$

Отсюда заключаем, что $\int u\,dv = \int [d(uv) - vdu] + C =$

$\int d(uv) - \int vdu + C = uv - \int vdu + C.$ Отсюда и следует формула (20.3).

При применении метода интегрирования по частям подынтегральное выражение данного интеграла разбивают на два множителя u и dv, из которых затем находят соответственно du (дифференцированием) и v (интегрированием) и применяют указанную формулу, сводя вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$. Причем этот метод целесообразно применять тогда, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

В общем случае правила разбиения на множители дать нельзя. Однако о некоторых типах интегралов, вычисляемых по частям, можно дать следующие рекомендации:

1. В интегралах: $\int P_n(x)\,\sin\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\,\cos\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\,e^{\alpha x}\,dx$ в качестве "u" берут многочлен $P_n(x)$, а остальное принимают за dv.

2. В интегралах: $\int P_n(x)\ln\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\,arctg\alpha x\,dx$,

$\int P_n(x)\,\arcsin\alpha x\,dx$ делают выбор: $dv = P_n(x)\,dx$, а остальное принимают за u. Например, найти интеграл $\int x e^{-x}\,dx$.

Пусть $\left| \begin{matrix} u = x, \quad dv = e^{-x}\,dx \\ du = dx,\ v = \int e^{-x}\,dx = -\,e^{-x} \end{matrix} \right|.$

Тогда, применяя формулу интегрирования по частям, получим $\int x\,e^{-x}dx = x(-\,e^{-x}) - \int (-e^{-x})\,dx = -\,x\,e^{-x} - \int e^{-x}\,d\,(-x) =$

$= -\,x\,e^{-x} - e^{-x} + C.$

20.1. Интегрирование рациональных дробей и некоторых иррациональных выражений

Рациональной дробью называется дробь вида $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ многочлены соответственно степени m и n. Рациональная дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется правильной, если $m < n$, и неправильной, если $m \ge n$.

Простейшими рациональными дробями являются дроби вида:

I. $\dfrac{A}{x-a}$, II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, IV. $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$,

где $k > 1$ – целое число; a, A, B, p, q – действительные числа; квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ – не имеет действительных корней, т.е $p^2 - 4q < 0$.

Дроби I и II интегрируются простейшими методами:

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}\,d\,(x-a) = A\,\frac{(x-a)^{-k+1}}{1-k} + C,\ k \ne 1.$$

Дробь III интегрируется следующим образом.

Сначала в квадратном трехчлене x^2+px+q выделяем полный квадрат $x^2+px+q=x^2+2\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$.

Тогда интеграл от дроби типа III принимает вид:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{(Ax+B)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx=$$

Делаем замену $x+\frac{p}{2}=t\Rightarrow x=t-\frac{p}{2}$, $dx=dt$ и используя свойство 3, далее получаем

$$=\int\frac{\left(A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B\right)dt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}=A\int\frac{t\,dt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{d\left(t^2+q-\frac{p^2}{4}\right)}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left(t^2+q-\frac{p^2}{4}\right)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Здесь мы использовали табличные интегралы 3 и 12 (п. 19.1 лекции 19) и то, что $q-\frac{p^2}{4}>0$.

Замечание. Указанным методом можно интегрировать дробь $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, если $\dfrac{p^2}{4}-q>0$, (т.е. знаменатель имеет действительные корни), а также функции вида $\dfrac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}}$.

Дробь вида IV после выделения полного квадрата и замены $x+\dfrac{p}{2}=t$ может быть преобразована следующим образом:

$$\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}=A\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^k}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^k},$$

где $a^2=q-\dfrac{p^2}{4}>0$.

Тогда ее интегрирование сводится к интегрированию двух полученных дробей, причем интеграл от первой из них – табличный, а от второй вычисляется по рекуррентной формуле

$$\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{t}{2(k-1)a^2(t^2+a^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2(k-1)a^2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}},$$

$k=2, 3,\ldots$.