Лекция 19.

Тема: НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

19.1. Основные понятия и формулы

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если $F'(x)=f(x)$ $\left(dF(x)=f(x)dx\right)$ для любого $x\in X$.

Любая непрерывная на X функция $f(x)$ имеет бесконечное множество первообразных, различающихся между собой постоянным слагаемым, т.е.

$$\Phi(x)=F(x)+C. \tag{19.1}$$

Теорема. Пусть $F(x)$ – какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке. Тогда формула (19.1) , где $C-$ произвольная постоянная, дает все первообразные для $f(x)$ в этом промежутке.

Определение. Совокупность всех первообразных $F(x)+C$ для функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** от этой функции, а операция нахождения первообразных – ***интегрированием*** функции $f(x)$.

Операция интегрирования является обратной к операции дифференцирования и обозначается $\int f(x)\,dx$.

Итак, $\int f(x)\,dx=F(x)+C$.

При этом $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а $f(x)\,dx$ – подынтегральным выражением.

Замечание. Для того, чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Например, $\int e^{2x}\,dx=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$, т.к. $\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}+C\right)'=e^{2x}$.

19.2. Основные свойства неопределенного интеграла

Предположим, что $f(x)$, $u(x)$ – произвольные дифференцируемые функции в некотором промежутке с непрерывной производной. Тогда справедливы следующие ***свойства*** неопределенного интеграла, вытекающие из его определения.

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$ или $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.

2. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$ или $\int d\,f(x) = f(x) + C$.

3. $\int (\alpha\, f_1(x) \pm \beta\, f_2(x))\,dx = \alpha \int f_1(x)\,dx \pm \beta \int f_2(x)\,dx$, где α, β – const.

4. Инвариантность формул интегрирования:

если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$,

где $u = u(x)$ – некоторая дифференцируемая функция с непрерывной производной.

19.3. Основные табличные интегралы

Если $u = u(x)$ – некоторая дифференцируемая функция с непрерывной производной, то:

1. $\int du = u + C$.

2. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$.

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C, \quad (u \neq 0)$.

4. $\int e^u\,du = e^u + C$.

5. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C, \qquad (a > 0, \quad a \neq 1)$.

6. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$.

7. $\int \cos u\,du = \sin u + C$.

8. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg\, u + C, \ \left(u \neq \frac{\pi}{2} + \pi\, k, \ k \in Z \right).$

9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\, ctg\, u + C, \ \left(u \neq \pi\, k, \ k \in Z \right).$

10. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| tg \frac{u}{2} \right| + C, \ \left(u \neq \pi\, k, \ k \in Z \right).$

11. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| tg \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C, \ \left(u \neq \frac{\pi}{2} + \pi\, k, \ k \in Z \right).$

12. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\, arctg \frac{u}{a} + C, \ (a \neq 0).$

13. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C, \ \left(|u| \neq |a|, \ a \neq 0 \right).$

14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C, \ \left(|a| > |u| \right).$

15. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a} \right| + C, \ \left(u^2 > -\, a \right).$

16. $\int \mathrm{sh}\, u\, du = \mathrm{ch}\, u + C.$

17. $\int \mathrm{ch}\, u\, du = \mathrm{sh}\, u + C.$

18. $\int \frac{du}{\mathrm{ch}^2 u} = \mathrm{th}\, u + C.$

19. $\int \frac{du}{\mathrm{sh}^2 u} = -\mathrm{cth}\, u + C, \ (u \neq 0).$

Замечание. Операция дифференцирования элементарных функций снова приводит к элементарным функциям, а операция интегрирования уже может привести к неэлементарным функциям, т.е. функциям, которые не выражаются через конечное число арифметических операций и суперпозиций элементарных функций. Например,

$\int e^{-x^2} dx -$ интеграл Пуассона, $\int \frac{dx}{\ln x} -$ интегральный логарифм,

$\int \cos x^2\, dx, \ \int \sin x^2\, dx -$ интегралы Френеля,

$\int \frac{\sin x}{x} dx -$ интегральный синус, $\int \frac{\cos x}{x} dx -$ интегральный косинус.

Приведенные интегралы хотя и существуют, но не являются элементарными функциями. Такие интегралы принято называть "неберущимися".

19.4. Простейшие методы интегрирования

Под непосредственным интегрированием понимают приведение данного интеграла к табличному с использованием тождественных преобразований подынтегрального выражения, свойств неопределенного интеграла и простейших подстановок (замена переменной) типа $u = \varphi(x)$.

При сведении интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция "подведения под знак дифференциала") $du = d(u \pm a)$; $du = \frac{1}{a} d(au) = \frac{1}{a} d(au + b)$, $a, b -$ числа, $a \neq 0$; $u\,du = \frac{1}{2} d\left(u^2\right)$; $\cos u\,du = d(\sin u)$; $\sin u\,du = -d(\cos u)$; $\frac{1}{u} du = d(\ln u)$; $\frac{du}{\cos^2 u} = d(\operatorname{tg} u)$; $\frac{du}{\sin^2 u} = -d(\operatorname{ctg} u)$.

Вообще, $f'(u)du = d(f(u))$ – дифференциал функции - часто используется при интегрировании.

Например, $\int x \cos\left(x^2 + 3\right) dx = \frac{1}{2} \int \cos\left(x^2 + 3\right) \cdot 2x\,dx = = \frac{1}{2} \int \cos\left(x^2 + 3\right) d\left(x^2 + 3\right) = \frac{1}{2} \sin\left(x^2 + 3\right) + C$, здесь мы учли, что $d\left(x^2 + 3\right) = 2x\,dx$, использовали табличный интеграл 7 и инвариантность формул интегрирования (свойство 4).