Предел последовательности комплексных чисел.

Предел и непрерывность функции комплексного переменного

- Пусть дана последовательность комплексных чисел $\{z_n\} = z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$. Комплексное число *a* называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если для любого положительного числа ε можно указать такой номер $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого все члены этой последовательности удовлетворяют неравенству $|z_n - a| < \varepsilon, \quad n \geq N$.

- **Теорема 18.1.**
- Последовательность $\{z_n = x_n + iy_n\}$ сходится к
- числу $a = \alpha + i\beta$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha, \ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta.$

- Последовательность называется ограниченной, если существует положительное число *M* такое, что для всех элементов этой последовательности выполняется неравенство $|z_n| \le M.$

- **Теорема 18.2.** Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Свойства пределов функций комплексного переменного

Пусть существуют пределы $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A, \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$ тогда

$$\lim_{z\to z_0}\left(f(z) \pm g(z)\right) = A \pm B,$$

$$\lim_{z\to z_0}\left(f(z) \cdot g(z)\right) = A \cdot B,$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0.$$

- Функция f (z) , заданная в области D, называется непрерывной в точке z0, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

- Для непрерывности функции комплексной переменной в точке z0 = x + iy необходимо и достаточно, чтобы её действительная и мнимая части, т.е. функции u(x,y) и v(x,y), были непрерывны в точке z0 по совокупности переменных x, y.

Дифференцирование функции комплексного переменного.

Условия Коши-Римана.

- Функция $\omega = f(z)$ называется дифференцируемой в точке $z \in D$, если отношение $\Delta\omega/\Delta z$ имеет конечный предел при $\Delta z \to 0$ произвольным образом.
- Этот предел называется производной функции f(z) в точке z и обозначается $f'(z)$ (или ω', или $\dfrac{d\omega}{dz}$)
- Так что по определению $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta z}$

- Если $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, то в каждой точке дифференцируемости функции $f(z)$ выполняются соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

называемыми условиями Коши-Римана.

- Функция ω = f(z) называется аналитической в данной точке z $\in$ D, если она дифференцируема как в самой точке, так и в некоторой её окрестности. Функция f(z) называется аналитической в области D, если она дифференцируема в каждой точке этой области. Для любой аналитической функции f(z) имеем

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Функция φ (x, y) называется гармонической в области D, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Геометрический смысл модуля и аргумента производной.

- Пусть функция f(z) аналитическая в точке z0 и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда равен коэффициенту растяжения в точке z0 при отображении ω = f(z) плоскости z на плоскость ω; точнее, при $|f'(z_0)|$ > 1 имеет место растяжение, а при
- $|f'(z_0)| < 1$ – сжатие.

- Аргумент производной геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z0 к любой гладкой кривой на плоскости z, проходящей через точку z0, чтобы получить направление касательной в точке ω0 = f(z0) к образу этой кривой на плоскости ω при отображении ω = f(z). При этом, если $\varphi = \arg f'(z_0) > 0$, то поворот происходит против часовой стрелки, а при φ < 0 – по часовой.