Функции комплексного переменного. Понятие функции комплексного переменного

Понятие функции комплексного переменного

- Говорят, что в области D комплексной плоскости z определена функция комплексного переменного $\omega = f(z)$, если каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) значений ω.
- Множество комплексных чисел ω, соответствующих всем $z \in D$, называется множеством значений функции $f(z)$.

- Поскольку каждое комплексное число $z = x + iy$ характеризуется парой действительных чисел x и y, то задание комплексной функции $\omega = u + iv$ комплексной переменой $z=x + iy$ эквивалентно заданию двух действительных функций двух действительных переменных, что можно записать в виде
- $\omega(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$.
- Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ определены в области D. Функция $u(x,y)$ называется действительной, а функция $v(x,y)$ – мнимой частью функции $\omega = f(z)$.

Основные элементарные функции комплексного переменного

- <u>Дробно-рациональная функция</u>

$$\omega = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}$$

- в частности, рациональной функцией является многочлен

$$\omega = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_o$$

Показательная функция определяется как сумма абсолютно сходящегося во всей комплексной плоскости степенного ряда

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ при любых $z_1 z_2$.

- $e^{z+2\pi k i} = e^z,$ (k = 0, $\pm 1, \pm 2, \ldots$), т. е. функция e^z является периодической с периодом T = 2πi.

- Тригонометрические функции sin z и cos z определяются степенными рядами

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots,$$

абсолютно сходящимися при любом значении z. Функции sin z и cos z – периодические с действительным периодом $T = 2\pi$, имеют только действительные нули при $z = \pi k$ и $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$ соответственно, где k=0, ,…

- Логарифмическая функция Ln z, где z0, определяется как функция, обратная показательной, причём
- Ln z = ln+ i Arg z = ln+ i arg z + 2πki, ,

  arg z – главное значение z. Эта функция является многозначной. Главным значением Ln z называется то значение, которое получается при k = 0; оно обозначается ln z: ln z = ln+ i arg z.

  Ln z = lnz + 2πki, k = 0