КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Основные понятия.

Определение комплексного числа

Комплексным числом z называется выражение $z = a + ib$, где a, b – любые действительные числа, i – мнимая единица. Первое число a пары (a, b) называется действительной частью комплексного числа z и обозначается символом $a = \operatorname{Re} z$.

Второе число b называется мнимой частью комплексного числа z и обозначается символом $b = \operatorname{Im} z$.

Модуль и аргумент комплексного числа

- Длина ρ вектора $\overrightarrow{OM}$ называется модулем комплексного числа и обозначается $\rho = |z|$, а угол φ, образованный этим вектором с положительным направлением оси OX, называется аргументом комплексного числа z и обозначается φ = Arg z.
- Легко выразить модуль и аргумент комплексного числа через его действительную и мнимую части: (при выборе из последнего соотношения значения φ следует учитывать знаки a и b).

Отметим, что аргумент комплексного числа определён не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π:

- Arg z = arg z + 2πk, k = 0, $\pm$1, $\pm$2,…,
- где arg z – есть главное значение аргумента, определяемое условиями $-\pi < \arg z \le \pi$, причём

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \text{если} \quad a > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \text{если} \quad a < 0, \quad b \ge 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \text{если} \quad a < 0, \quad b < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad a = 0, \quad b > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad a = 0, \quad b < 0. \end{cases}$$

Свойства модуля комплексных чисел

1) $|\overline{z}| = |z|$;

2) $|z| \cdot |\overline{z}| = |z|^2$;

3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

4) $|z^n| = |z|^n$;

5) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, если $z_2 \neq 0$;

6) $|\operatorname{Re} z| \le |z|$, $|\operatorname{Im} z| \le |z|$;

7) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$;

8) $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$.

Действия над комплексными числами

- $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$.
- Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z = a + ib$, где $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$.
- Операция вычитания комплексных чисел определяется как операция, обратная сложению.
- Произведением комплексных чисел
- $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется комплексное число $z = a + ib$ такое, что
- $a = a_1a_2 – b_1b_2$, $b = a_1b_2 + a_2b_1$.

Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня из комплексного числа.

$$z^n = \rho^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right),$$

формула Муавра

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Комплексное число $z_1 = \sqrt[n]{z}$ называется корнем n–й степени из комплексного числа z, если $z = z_1^n$.

Как было отмечено, аргумент комплексного числа определён не однозначно, а с точностью до слагаемого кратного 2π.

Поэтому корень n–й степени из комплексного числа z имеет n

различных значений, которые находят по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

$$\text{где} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \quad \varphi = \arg z, \quad \rho = |z|.$$

- Точки на комплексной плоскости, соответствующие различным значениям $\sqrt[n]{z}$, расположены в вершинах правильного *n*–угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке z = 0.
- Корень n–й степени из действительного числа *a* также имеет n различных значений; среди этих значений действительных будет два, одно или ни одного в зависимости от чётности или нечётности *n* и знака числа *a*.