ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Экстремум функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутой области.

Экстремум функции двух переменных.

Понятие точек экстремума и самого экстремума функции $z=f(x,y)$ вводится по аналогии с функциями одной переменной $y=f(x)$.

Понятие точек экстремума.

Определение 15.1. Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется **точкой максимума** функции $z=f(x,y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x,y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x,y) < f_0(x_0,y_0)$.

Значение $z(M_0) = f(x_0,y_0)$ – **максимум функции** $z=f(x,y)$ в точке M_0.

Определение 15.2. Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется **точкой минимума** функции, что для всех точек $M(x,y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x,y) \geq f_0(x_0,y_0)$.

Значение $z(M_0) = f(x_0,y_0)$ – **минимум функции** $z=f(x,y)$ в точке M_0.

Точки максимума и точки минимума называют **точками экстремума**.

Теорема 15.1. (*необходимое условие экстремума*).Если дифференцируемая функция $z=f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0,y_0)$ экстремум, то частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, то есть $z'_x(x_0,y_0)=0$ и $z'_y(x_0,y_0)=0$.

Точки, в которых частные производные первого порядка равны нулю, называют **«подозрительными» на экстремум, критическими или стационарными**.

Замечание 1. Функция может иметь экстремум и в точках, в которых одна или обе производные не существуют, то есть функция не дифференцируема.

Например. Функция $z=\sqrt{x^2+y^2}$ имеет минимум в точке $O(0,0)$, но очевидно не имеет в этой точке частных производных.

Замечание 2. Равенство нулю частных производных первого порядка является лишь необходимым, но не достаточным условием экстремума.

Например. Для функции $z = xy$ частные производные точке $O(0,0)$ равны нулю, но точка $O(0,0)$ не является экстремумом для этой функции.

Теорема 15.1. (*достаточное условие экстремума*). Пусть в стационарно точке $M_0(x_0,y_0)$ и в некоторой её окрестности функция $z = f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Положим $A = z''_{xx}(x_0,y_0)$, $B = z''_{xy}(x_0,y_0)$, $C = z''_{yy}(x_0,y_0)$ и определим величину

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 .$$

Тогда

1) если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x,y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0,y_0)$: максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$;
2) если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x,y)$ не имеет экстремума в точке $M_0(x_0,y_0)$;
3) если $\Delta = 0$, то функция $z = f(x,y)$ может иметь экстремум в точке $M_0(x_0,y_0)$, а может не иметь. Требуются дополнительные исследования.

Алгоритм нахождения дифференцируемой функции двух переменных

z = f(x,y).

1. Найти частные производные первого порядка z'_x и z'_y.
2. Найти стационарные точки, решив систему :
$$\begin{cases} z'_x(x, y) = 0 \\ z'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$
3. Найти частные производные второго порядка z''_{xx}, z''_{xy} z''_{yy}.
4. Вычислить значение A, B, C в каждой стационарной точке и для каждой найти значение Δ.
5. Сделать вывод о существовании экстремума в каждой стационарной точке на основании достаточного условия экстремума.
6. Найти экстремальные значения функции.

Наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутой области.

Пусть функция $z = f(x,y)$ непрерывна в области D, ограниченной замкнутым контуром L. Если наибольшее или наименьшее значение достигается в точке $M_0(x_0,y_0)$, лежащей внутри области D, то в этой точке функция $z = f(x,y)$ имеет максимум или минимум. Наибольшее или наименьшее значение функция также может достигать и в точке, лежащей на контуре L. Тогда, если контур задан уравнением $y = \varphi(x)$, то на контуре функция $z = f(x,y)$ оказывается функцией одного аргумента $z = f(x, \varphi(x))$. И вопрос сводится к задаче нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения дифференцируемой функции двух переменных $z = f(x,y)$ в области D.

1). Найти стационарные точки, расположенные в области D, и вычислить значения функции в них.

2). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$ на линиях, образующих границы области D.

3). Выбрать наибольшее и наименьшее значения из всех найденных.