ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Дифференцирование сложных и неявных функций. Приложения понятия частных производных(производная по направлению, градиент функции).

<u>Дифференцирование сложных функций.</u>

Вспомним правило дифференцирования для функции одной переменной, также называемое цепным правилом. Если $y = f(x)$ и $x = g(t)$ - дифференцируемые функции, то сложная функция $y = f(g(t))$ тоже дифференцируема, причём:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Далее обобщим цепное правило на функции нескольких переменных.

Цепное правило.

Теорема 14.1 (цепное правило, случай 1). Пусть $z = f(x;y)$ - дифференцируемая функция от x и y, и пусть $x = g(t)$ и $y = h(t)$ - дифференцируемые функции от t. Тогда z - дифференцируемая функция от t, причём

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Так как мы часто пишем $\frac{\partial z}{\partial x}$ вместо $\frac{\partial f}{\partial x}$, цепное правило можно переписать в следующей форме: $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$.

Теорема 14.2 (цепное правило, случай 2). Пусть $z = f(x;y)$ - дифференцируемая функция от x и y, и пусть $x = g(s;t)$ и $y = h(s;t)$ - дифференцируемые функции от s и t. Тогда z - дифференцируемая функция от t, причём

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Теорема 14.3 (цепное правило, общий случай). Пусть U - дифференцируемая функция от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где каждое x_i – дифференцируемая функция от m переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Тогда u - дифференцируемая от $t_1, t_2, \ldots, t_m$

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}$$

для каждого $j = 1, 2, \ldots, m$.

Дифференцирование неявных функций.

Для начала рассмотрим неявно заданную функцию одной переменной $F(x;y)=0$, данное уравнение определяет y неявно, как дифференцируемую функцию от x, т.е. $y = f(x)$, где $F(x; f(x)) = 0$ для всех x из области определения функции f . Если функция F дифференцируема, то мы можем продифференцировать обе части уравнения $F(x;y)=0$ по иксу, применяя **цепное правило для случая 1**, рассматривая x и y как функции от x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Заметим, что $\frac{dx}{dx} = 1$, разрешаем данное уравнение относительно $\frac{dy}{dx}$, получаем следующую формулу:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F'_x}{F'_y}, \text{ при условии, что } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Рассмотрим теперь неявные функции двух переменных. Пусть уравнение вида $F(x;y,z)=0$ определяет z неявно как дифференцируемую функцию двух переменных x и y, т.е. $z = f(x;y)$, где $F(x;y, f(x,y)) = 0$ для всех $(x;y)$ из области определения функции f. Если функции F и f дифференцируемы, то мы можем продифференцировать обе части уравнения $F(x;y,z)=0$ по иксу применяя **цепное правило для случая 2**, рассматривая x,y,и z как функции от x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Поскольку $\frac{\partial x}{\partial x}=1$, $\frac{\partial y}{\partial x}=0$, приходим к уравнению вида: $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$. Решая уравнение относительно $\frac{\partial z}{\partial x}$, получаем: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F'_x}{F'_z}$. Формула для $\frac{\partial y}{\partial x}$ выводится аналогично: $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F'_y}{F'_z}$, при условии, что $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$.

<u>Производная по направлению</u>.

Пусть $z=f(x;y)$ дифференцируемая функция двух переменных. Рассмотренные ранее частные производные от функции двух переменных, являются «производными в направлении координатных осей». Например при нахождении z'_x приращение получает переменная *x*, изменяясь от *x* до *x+Δx* вдоль оси *Ox*. Целесообразно поставить вопрос об определении и вычислении производной по любому направлению.

Пусть направление движения точки *M(x,y)* плоскости *xOy* будет показывать вектор $\overline{MM_1}=\vec{l}$, где *M₁(x+Δx; y+Δy)*. Обозначим длину вектора $\left|\overrightarrow{MM_1}\right|=\Delta\vec{l}$. При этом функция получит приращение $\Delta z=f(x+\Delta x;y+\Delta y)-f(x;y)$.

Определение 14.1. *Производной функции* $z=f(x;y)$ *в точке M(x,y) по направлению вектора* $\vec{l}$ *называется предел отношения* $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ *при* $\Delta\vec{l}\to 0$*, если он существует. Обозначается* z'_l *или* $\frac{\partial z}{\partial l}$*. То есть* $\frac{\partial z}{\partial l}=\lim\limits_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta l}$.

Производная по направлению характеризует скорость изменения функции в направлении вектора. Если $\frac{\partial z}{\partial l}>0$, то функция возрастает в направлении вектора $\vec{l}$, если $\frac{\partial z}{\partial l}<0$, то функция $z=f(x;y)$ убывает в направлении вектора $\vec{l}$.

Механический (физический) смысл производной по направлению состоит в том, что она характеризует мгновенную скорость изменения функции $z=f(x;y)$ в точке *M* в направлении вектора $\vec{l}$. Для вычисления производной по направлению функции двух переменных используют формулу $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$, где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ - направляющие косинусы, то есть косинусы углов, образуемых вектором $\vec{l}$ с осями координат.

Градиент функции и его применение.

Градиент – это характеристика, показывающая направление и величину максимальной скорости изменения функции в данной точке. Пусть $z = f(x;y)$ дифференцируемая функция двух переменных.

Определение 14.2. *Градиентом функции* $z = f(x;y)$ *называется вектор, координатами которого являются частные производные функции* $z = f(x;y)$ *в точке M(x,y), и обозначается grad z , то есть grad z =* $\{z'_x; z'_y\}$ *или* $grad\ z = z'_x\vec{i} + z'_y\vec{j}$.

Теорема 14.4. Градиент функции $z = f(x;y)$ в точке *M(x,y)* характеризует направление максимальной скорости возрастания этой функции в данной точке, причём наибольшая скорость возрастания функции в точке равна $|grad\ z| = \sqrt{z'^2_x + z'^2_y}$.

Итак, градиент – вектор направленный в сторону наискорейшего возрастания функции и равный по величине мгновенной скорости возрастания функции. Например, если рассмотреть высоту поверхности земли над уровнем моря, то её градиент в каждой точке поверхности будет показывать «направление самого крутого подъёма», и своей величиной характеризовать крутизну склона.

Частные производные второго порядка.

Определение 14.3. *Частными производными второго порядка от функции называются производные от частных производных первого порядка.*

Рассмотрим частную производную $z'_x(x;y)$. От этой производной возьмём производную по переменной x и по переменной y. Таким образом $(z'_x)'_x = z''_{xx}$ и $(z'_x)'_y = z''_{xy}$. Аналогично получаем $(z'_y)'_x = z''_{yx}$ и $(z'_y)'_y = z''_{yy}$. Следовательно частных производных второго порядка от функции $z = f(x;y)$ будет четыре $z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}, z''_{yx}$. Производные z''_{xy}, z''_{yx} называют **смешанными производными.**

Теорема 14.5. (Шварца). Если частные производные n-го порядка непрерывны, то смешанные производные того же порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности для $z = f(x;y)$ имеем $z''_{xy} = z''_{yx}$. Согласно этой теореме смешанные производные можно вычислять в любом порядке и нет необходимости находить обе смешанные производные.

Частные производные второго порядка используются при нахождении экстремальных значений функции двух переменных.