Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

Дифференцирование сложных и неявных функций. Приложения понятия частных производных(производная по направлению, градиент функции).

Дифференцирование сложных функций.

Вспомним правило дифференцирования для функции одной переменной, также называемое цепным правилом. Если *y=f(x)* и *x=g(x)* - дифференцируемые функции, то сложная функция *y=f(g(t))* тоже дифференцируема, причём:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Дифференцирование сложных функций.

Теорема 14.1 (цепное правило, случай 1). Пусть $z=f(x,y)$- дифференцируемая функция от x и y, и пусть $x=g(t)$ и $y=h(t)$ - дифференцируемые функции от t. Тогда z - дифференцируемая функция от t, причём

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Дифференцирование сложных функций.

Теорема 14.2 (цепное правило, случай 2). Пусть *z=f(x,y)*- дифференцируемая функция от *x* и *y*, и пусть x=g(s,t) и y=h(s,t) - дифференцируемые функции от *s* и *t*. Тогда *z* - дифференцируемая функция от t, причём

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Дифференцирование сложных функций.

Теорема 14.3 (цепное правило, общий случай). Пусть U - дифференцируемая функция от *n* переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где каждое x_i – дифференцируемая функция от *m* переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Тогда - дифференцируемая от $t_1, t_2, \ldots, t_m$

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}$$

Дифференцирование неявных функций.

Рассмотрим неявно заданную функцию одной переменной *F(x,y)=0* , данное уравнение определяет *y* неявно, как дифференцируемую функцию от *x*, т.е. *y=f(x)* , где *F(x,f(x))=0* для всех *x* из области определения функции *f* . Если функция *F* дифференцируема, то мы можем продифференцировать обе части уравнения по иксу, применяя **цепное правило для случая 1**, рассматривая *x* и *y* как функции от *x*:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

Дифференцирование неявных функций.

Заметим, что $\frac{dx}{dx} = 1$, разрешаем данное уравнение относительно $\frac{dy}{dx}$, получаем следующую формулу:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

при условии, что $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$

Дифференцирование неявных функций.

Рассмотрим теперь неявные функции двух переменных. Пусть уравнение вида *F(x,y,z)=0* определяет *z* неявно как дифференцируемую функцию двух переменных *x* и *y*, т.е. *z=f(x,y)*, где *F(x, y, f(x,y))=0* для всех *(x;y)* из области определения функции *f*. Если функции *F* и *f* дифференцируемы, то мы можем продифференцировать обе части уравнения *F(x, y, z)=0* по иксу применяя **цепное правило для случая 2**, рассматривая *x,y*,и *z* как функции от *x*:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

Дифференцирование неявных функций.

Поскольку $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, приходим к уравнению вида:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Решая уравнение относительно $\frac{\partial z}{\partial x}$, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F'_x}{F'_z}$$

Формула для выводится аналогично.

Производная по направлению.

Пусть направление движения точки *M(x,y)* плоскости *xOy* будет показывать вектор , где $M_1(x+\Delta x; y+\Delta y)$. Обозначим длину вектора

$$\left|\vec{MM}_1\right| = \Delta\vec{l}$$

При этом функция получит приращение

$$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y)$$

Производная по направлению.

Определение 14.1. *Производной функции $z=f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ по направлению вектора* $\vec{l}$ *называется предел отношения* $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ *при* $\Delta \vec{l} \to 0$

если он существует.

Обозначается

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}$$

Производная по направлению.

Производная по направлению характеризует скорость изменения функции в направлении вектора.

Если $\frac{\partial z}{\partial l} > 0$ то функция возрастает в направлении вектора $\vec{l}$, если $\frac{\partial z}{\partial l} < 0$, то функция убывает в направлении вектора $\vec{l}$.

Производная по направлению.

Механический (физический) смысл производной по направлению состоит в том, что она характеризует мгновенную скорость изменения функции *z=f(x,y)* в точке *M* в направлении вектора $\vec{l}$. Для вычисления производной по направлению функции двух переменных используют формулу

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$$

<u>Градиент функции и его применение.</u>

Градиент – это характеристика, показывающая направление и величину максимальной скорости изменения функции в данной точке.

Определение 14.2. *Градиентом функции $z=f(x,y)$ называется вектор, координатами которого являются частные производные функции $z=f(x,y)$ в точке $M(x,y)$, и обозначается grad z , то есть* $grad\ z = \{z'_x; z'_y\}$ *или :*

$$grad\ \ z = z'_x\vec{i} + z'_y\vec{j}$$

Градиент функции и его применение.

Теорема 14.4. Градиент функции *z=f(x,y)* в точке *M(x,y)* характеризует направление максимальной скорости возрастания этой функции в данной точке, причём наибольшая скорость возрастания функции в точке равна

$$\left| grad\ \ z \right| = \sqrt{{z'_x}^2 + {z'_y}^2}$$

Градиент функции и его применение.

Итак, градиент – вектор направленный в сторону наискорейшего возрастания функции и равный по величине мгновенной скорости возрастания функции. Например, если рассмотреть высоту поверхности земли над уровнем моря, то её градиент в каждой точке поверхности будет показывать «направление самого крутого подъёма», и своей величиной характеризовать крутизну склона.

<u>Частные производные второго порядка.</u>

Определение 14.3. *Частными производными второго порядка от функции называются производные от частных производных первого порядка.*

Рассмотрим частную производную $z'_x(x;y)$

От этой производной возьмём производную по переменной *x* и по переменной *y*. Таким образом

$(z'_x)'_x = z''_{xx}$ и $(z'_x)'_y = z''_{xy}$

Аналогично получаем $(z'_y)'_x = z''_{yx}$ и

$$(z'_y)'_y = z''_{yy}$$

Частные производные второго порядка.

Следовательно частных производных второго порядка от функции *z=f(x,y)* будет четыре:

$$Z''_{xx},\ Z''_{yy},\ Z''_{xy},\ Z''_{yx}$$

Производные $Z''_{xy},\ Z''_{yx}$ называют **смешанными производными.**

Частные производные второго порядка.

Теорема 14.5. (Шварца). Если частные производные *n*-го порядка непрерывны, то смешанные производные того же порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности для *z=f(x,y)* имеем $z''_{xy} = z''_{yx}$. Согласно этой теореме смешанные производные можно вычислять в любом порядке и нет необходимости находить обе смешанные производные.

Частные производные второго порядка используются при нахождении экстремальных значений функции двух переменных.