ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Функции нескольких переменных. Частные производные.

Понятие функции двух и нескольких переменных.

Функции одной переменной не охватывают все зависимости, существующие в природе. Поэтому естественно расширить известное понятие функциональной зависимости и ввести понятие функции нескольких переменных.

Пусть задано множество *D* упорядоченных пар чисел *(x,y)*.

Опередение 13.1. Функцией двух переменных называется зависимость *f*, при которой каждой паре чисел $(x, y) \in D$ ставится в соответствие единственное значение переменной $z \in R$.

Записывается в виде $z = f(x; y)$. При этом x и y называются независимыми переменными (аргументами), а *z* – зависимой переменной (функцией); *f* – закон соответствия.

Областью определения *D* функции $z = f(x; y)$ называется множество пар (x;y), при которых функция $z = f(x; y)$ определена.

Область определения изображается в виде некоторой области на плоскости *xOy*. Линия, ограничивающая эту область, называется ***границей области***. Точки области, не лежащие на границе, называются ***внутренними точками области***. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется ***открытой***. Область с присоединённой к ней границей называется замкнутой и обозначается $\overline{D}$.

Функция двух переменных допускает графическое изображение.

Определение 13.2. Графиком функции двух переменных $z = f(x; y)$ называется множество точек трёхмерного пространства *Oxyz,* аппликата *z* которых связана с абсциссой *x* и ординатой *y* функциональной зависимостью $z = f(x; y)$.

Совокупность всех таких точек представляет некоторую поверхность в трёхмерном пространстве.

Функция двух переменных - это частный случай функции нескольких переменных. Пусть имеется n переменных величин и каждому упорядоченному набору *(x_1, x_2, ... , x_n)* из некоторого множества *X* соответствует одно определённое значение переменной *y*, то говорят, что задана функция нескольких переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При этом переменные $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называются независимыми переменными (аргументами), а *y* - независимой (функцией).

<u>Предел и непрерывность функции нескольких переменных</u>.

Для функции двух и большего числа переменных вводится понятие предела функции и непрерывности, аналогично функции одной переменной. Введём понятие окрестности точки. Пусть на плоскости даны две точки *M(x,y)* и *M_0 (x_0,y_0)*. ***δ*** – окрестностью точки M_0 называется множество всех точек *M(x,y)* плоскости расстояние от которых до точки *M_0* меньше *δ*, то есть $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ < δ. Другими словами, δ – окрестность точки M_0 – это все точки, лежащие внутри круга с центром M_0 и радиусом δ. Обозначают δ – окрестность точки M_0 символом $U_\delta(M_0)$.

Определение 13.3. Число А называется пределом функции $z = f(x;y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$, если для любого ε > 0 существует такое δ > 0 , что для всех (x;y) из δ – окрестности точки (x_0;y_0), причём $(x \neq x_0; y \neq y_0)$ выполняется неравенство $|(f(x,y) - A)| < \varepsilon$.

Предел функции обозначается $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = A$. С помощью символов это определение может быть записано следующим образом:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall(x;y) \in U_\delta(x_0;y_0),.x \neq x_0, y \neq y_0 \Rightarrow |(f(x,y) - A)| < \varepsilon.$$

Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам предела функции одной переменной.

Определение 13.4. Функция $z = f(x;y)$ называется непрерывной в точке M_0(x_0;y_0), если предел функции в этой точке существует и равен значению функции в этой точке. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$.

Таким образом функция $z = f(x;y)$ непрерывна в точке M_0(x_0;y_0), если она:

1) определена в этой точке и некоторой её окрестности;
2) существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)$;

3) выполнено неравенство $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$.

Функция $z = f(x;y)$ **непрерывна в области**, если она непрерывна во всех точках этой области. Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке, а именно в этой точке либо функция не определена, либо не существует предела, либо значение функции не равно значению предела), называются **точками разрыва** этой функции. Например для функции $z = \frac{1}{y-2x}$ точками разрыва являются точки прямой $y = 2x$ (их называют линиями разрыва). Для функции двух переменных справедливы теоремы о непрерывных функциях одной переменной.

<u>Понятие частных производных и дифференциала функции двух переменных.</u>

Пусто функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки *M(x;y)*. Так как *x* и *y* независимые переменные, то одна из них может изменяться, а вторая сохранять своё значение.

1. Переменной *x* дадим приращение *Δx*, а *y* сохраним неизвестным.
   Частным приращением функции $z = f(x;y)$ **по переменной** *x* называется соответствующее приращение функции $\Delta_x Z = f(x+\Delta x;y) - f(x;y)$.
2. Переменной *y* дадим приращение *Δy*, а *x* сохраним неизвестным.
   Частным приращением функции $z = f(x;y)$ **по переменной** *y* называется соответствующее приращение функции $\Delta_y Z = f(x;y+\Delta y) - f(x;y)$.
3. Переменной *x* дадим приращение *Δx*, а переменной *y* дадим приращение *Δy*.
   Полное приращение функции $z = f(x;y)$ определяется равенством $\Delta\ Z = f(x+\Delta x;y+\Delta y) - f(x;y)$.

Вспомним определение производной функции одной переменной и выведем понятие частных производных функции двух переменных, заменяя обычное приращение функции частным приращением.

Определение 13.5. Частной производной функции $z = f(x;y)$ **по переменной *x*** называется предел отношения частного приращения функции к приращению соответствующей переменной, когда это приращение стремиться к нулю и обозначается $z'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}$. Аналогично определяется **частная производная функции** $z = f(x; y)$ **по переменной** *y:* $z'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x; y+\Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}$.

В литературе встречаются следующие обозначения частной производной: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} = z'_x = f'_x$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = z'_y = f'_y$.

Из определения частных производных следует правило их нахождения.

Правило вычисления частной производной функции $z = f(x; y)$ по переменной *x*.

1. Считать переменную *y* постоянной величиной.
2. Вычислить z'_x, используя формулы и правила вычисления производных функций одной переменной *x*.

   Для нахождения z'_y считать постоянной переменную *y*.

Дифференциал функции нескольких переменных.

Пусть функция $z = f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y.

Частным дифференциалом по переменной *x* функции *z* называется произведение $z'_x \Delta x$ и обозначается символом $d_x z$, то есть $d_x z = z'_x \Delta x$.

Частным дифференциалом по переменной *y* функции *z* называется произведение $z'_y \Delta y$ и обозначается символом $d_y z$, то есть $d_y z = z'_y \Delta y$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x; y)$ называется сумма частных дифференциалов или сумма произведений частных производных на приращение соответствующей независимой переменной:

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y \quad \text{или} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Если в формулу полного дифференциала подставить функцию *z*=*x*, затем функцию *z*=*y*, получим:

$$dx = x'_x \Delta x + x'_y \Delta y = \Delta x; \; dy = y'_x \Delta x + y'_y \Delta y = \Delta y.$$

Таким образом, как и в случае функции одной переменной, дифференциал независимой переменной совпадёт с приращением этой переменной. С учётом этого формулы для полного дифференциала примут вид:

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y \text{ или } dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y .$$