Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

Функции нескольких переменных. Частные производные. Полный дифференциал.

Понятие функции двух и нескольких переменных.

Функции одной переменной не охватывают все зависимости, существующие в природе. Поэтому естественно расширить известное понятие функциональной зависимости и ввести понятие функции нескольких переменных.

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел (x,y).

Опеределение 13.1. Функцией двух переменных называется зависимость f, при которой каждой паре чисел $(x,y)\in D$ ставится в соответствие единственное значение переменной $z\in D$.

Областью определения D функции $z=f(x,y)$ называется множество пар (x;y), при которых функция $z=f(x,y)$ определена.

<u>Функция двух переменных допускает графическое изображение.</u>

Определение 13.2. Графиком функции двух переменных $z=f(x,y)$ называется множество точек трёхмерного пространства *Oxyz,* аппликата z которых связана с абсциссой x и ординатой y функциональной зависимостью $z=f(x,y)$.

Совокупность всех таких точек представляет некоторую поверхность в трёхмерном пространстве.

Функция двух переменных - это частный случай функции нескольких переменных. Пусть имеется n переменных величин и каждому упорядоченному набору $(x_1,x_2, \dots , x_n)$ из некоторого множества X соответствует одно определённое значение переменной y, то говорят, что задана функция нескольких переменных . При этом переменные называются независимыми переменными (аргументами), а y - независимой (функцией).

Предел и непрерывность функции нескольких переменных.

Определение 13.3. Число A называется пределом функции z=f(x,y) при $x \to x_0$ и $y \to y_0$, если для любого ε > 0 существует такое δ > 0 , что для всех (x;y) из δ – окрестности точки $(x_0;y_0)$, причём $(x \neq x_0;\ y \neq y_0)$ выполняется неравенство:

$$\left|(f(x,y) - A)\right| < \varepsilon$$

Предел функции обозначается $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = A$

С помощью символов это определение может быть записано следующим образом:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall (x;y) \in U_\delta(x_0;y_0), .x \neq x_0, y \neq y_0 \Rightarrow \left|(f(x,y) - A)\right| < \varepsilon$$

Условие непрерывности функции нескольких переменных.

Определение 13.4. Функция z=f(x,y) называется непрерывной в точке $M_0(x_0;y_0)$, если предел функции в этой точке существует и равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$

Функция непрерывна в точке $M_0(x_0;y_0)$, если она:

- определена в этой точке и некоторой её окрестности;
- существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)$;
- выполнено неравенство $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$.

Понятие частных производных и дифференциала функции двух переменных.

Определение 13.5. Частной производной функции z=f(x,y) **по переменной *x*** называется предел отношения частного приращения функции к приращению соответствующей переменной, когда это приращение стремиться к нулю и обозначается

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}$$

Аналогично определяется **частная производная функции** *z=f(x,y)* **по переменной** *y.*

Правило вычисления частной производной функции *z=f(x,y)* **по переменной** *x***.**

- Считать переменную ***y*** постоянной величиной.
- Вычислить z'_x, используя формулы и правила вычисления производных функций одной переменной *x*.

Дифференциал функции нескольких переменных.

Пусть функция *z=f(x,y)* имеет непрерывные частные производные по переменной x и y. **Полным дифференциалом функции** *z=f(x,y)* называется сумма частных дифференциалов или сумма произведений частных производных на приращение соответствующей независимой переменной:

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$