ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

12.2. Исследование поведения функции с помощью производных

12.2.1. Интервалы монотонности. Экстремумы

Определение. Промежутки, на которых функция $f(x)$ возрастает (убывает), называются промежутками монотонности функции.

Необходимым и достаточным условием строгой монотонности непрерывной функции $f(x)$ на промежутке X является **сохранение знака производной** $f'(x)$ (где она существует) внутри промежутка X, например:
если $\exists f'(x)$ и $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$непрерывная, то $f(x)$ строго возрастает на X;
если $\exists f'(x)$ и $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow$непрерывная, то $f(x)$ строго убывает на X.
Причем здесь условия $f'(x) = 0$ и $f'(x)$ не существуют возможны лишь в конечном числе точек на любом конечном отрезке промежутка X.

Докажем, например, **достаточность для** случая **возрастания** дифференцируемой функции $f(x)$ на $(a;b)$.

Теорема 12.1. Если для $\forall x \in (a;b)$ $\exists f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на $(a;b)$.

Доказательство. Для определенности возьмем $f'(x) > 0$ при $\forall x \in (a;b)$. Пусть $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ такие, что $x_1 < x_2$. Тогда, согласно теореме Лагранжа, $\forall c \in (a;b)$ такое, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

По условию $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$. Следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т.е. $f(x_2) > f(x_1)$. Тогда $f(x)$ возрастает на $(a;b)$. Аналогично для убывания. Теорема доказана.

Определение. Точки, в которых либо $f'(x) = 0$, либо $f'(x) = \infty$, либо $f'(x)$ не существует, называются **критическими точками** первой производной. При этом те из них, где $f'(x) = 0$, называются **стационарными**. На рис. 12.1 точки $x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$–критические, из них стационарные – только x_1, x_3, x_5, x_7.

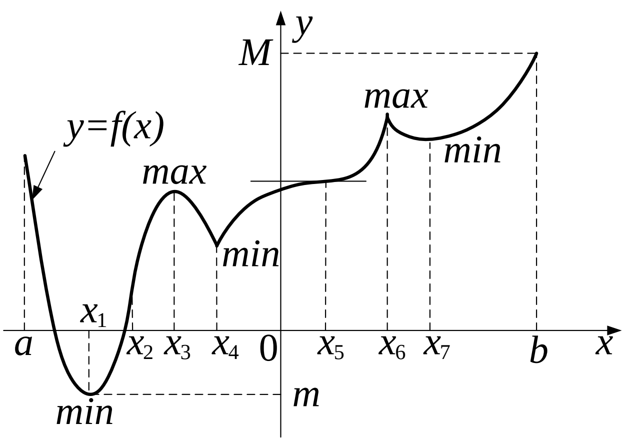


Рис. 12.1

Определение. Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если существует такая окрестность $U(x_0)$, что для $\forall x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

Максимумы $(\max)$ и **минимумы** $(\min)$ называют одним общим термином **экстремумы**. При этом говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум (максимум, минимум) $f(x_0)$. Значение же $f(x_0)$ называют экстремальным (максимальным, минимальным) значением функции. В силу локального характера экстремумов, функция $f(x)$ может в своей области определения иметь их несколько и даже бесконечно много. При этом некоторые из локальных минимумов могут быть больше каких-то локальных максимумов (см. рис. 12.1). Поэтому следует различать понятия локальных экстремумов $(\min, \max)$ и наибольшего (M), наименьшего (m) значений функции $f(x)$ в ее области задания.

Теорема 12.2. *Необходимое условие экстремума*

Если функция $f(x)$, непрерывная в точке x_0 и дифференцируемая в некоторой окрестности $U(x_0)$, имеет экстремум в точке x_0, то или $f'(x_0) = 0$, или $f'(x_0)$ не существует.

Доказательство, очевидно, вытекает из теоремы Ферма при ее локальном применении к $f(x)$ в достаточно малой окрестности точки x_0. Из теоремы 12.2 следует, что точки локальных экстремумов функции $f(x)$ следует искать внутри ООФ среди **критических точек** ее первой производной. Однако не во всех таких точках функция обязательно имеет экстремум (см. рис. 12.1). Приведем теорему, позволяющую разобраться в точках возможного экстремума.

Теорема 12.3. *Первый достаточный признак экстремума*

Если функция $f(x)$ непрерывна в критической точке x_0, дифференцируема в некоторой ее окрестности $U(x_0)$ и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для $\forall x \in U(x_0 - 0)$, $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ для $\forall x \in U(x_0 + 0)$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный максимум (минимум); если $f'(x)$ сохраняет свой знак для $\forall x \in U(x_0)$, то в точке x_0 нет локального экстремума, то есть, если при переходе через критическую точку x_0 из ООФ (слева направо) $f'(x)$ **меняет знак с "+" на "–"**, то точка x_0 - точка локального **максимума**; если– **с "–" на "+"**, то x_0 –точка локального

минимума; если $f'(x)$ в точке x_0 не меняет свой знак, то в точке x_0 экстремума нет.

Отметим, что экстремумы в стационарных точках (типа x_1, x_3, x_7 на рис. 12.1) называют дифференцируемыми или гладкими (есть касательная) экстремумами, а экстремумы, где $f'(x)$ не существует (типа x_4, x_6 на рис. 12.1), называют недифференцируемыми или уголковыми. Там же, на рис. 12.1 точка x_5, будучи критической (стационарной, т.к. касательная параллельна Ox), не является точкой экстремума.

На основании определения экстремума и теоремы 12.2 можно сделать следующее утверждение.

Непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ принимает свои наибольшее (глобальный максимум M) и наименьшее (глобальный минимум m) значения на $[a;b]$ либо на концах отрезка, либо в его внутренних точках локальных экстремумов. Поэтому для отыскания наибольшего (M) и наименьшего (m) значений непрерывной функции на отрезке $[a;b]$ достаточно вычислить и сравнить ее значения на концах отрезка и во всех критических точках, лежащих внутри отрезка $[a;b]$, выбрав при этом из них M и m.

Примеры. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y = f(x)$.

1. $y = 4x^3 - 3x^4 + 2$. Здесь $D(y) = R$.

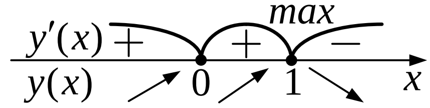
$y' = 12x^2 - 12x^3 = 12x^2(1-x)$.

Критические точки $y'(x)$:

а) $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1 \in D(y)$;

б) y' – не существует $\Rightarrow$ таких точек нет.

Используя метод интервалов, строим схему перемены знаков для $y'(x)$.



Так как $y'(x) = 0$ лишь в одной (отдельной) точке, то интервалом монотонного возрастания функции является интервал $(-\infty; 1)$, а интервалом убывания – интервал $(1; +\infty)$. Если же при этом речь идет о промежутках возрастания и убывания, то функция возрастает при $x \in (-\infty; 1]$, а убывает при $x \in [1; +\infty)$.

Так как производная $y'(x)$ непрерывной в точке $x_2 = 1$ функции $y(x)$ при переходе через эту точку меняет знак с «+» на «–», то в точке $x_2 = 1$ функция $y(x)$ имеет локальный максимум. Причем $y_{\max} = y(1) = 3$.

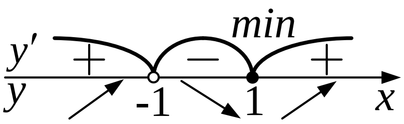
2. $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$. Здесь $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

$$y' = 2 \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{4(x-1)}{(x+1)^3}.$$

Критические точки $y'(x)$:

а) $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \in D(y)$;

б) y' – не существует $\Rightarrow x_2 = -1 \notin D(y)$.



Строим схему перемены знаков производной. Итак, интервалы возрастания функции $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; интервал убывания функции $(-1; 1)$. Или можно сказать, что функция
возрастает при $x \in (-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$ и убывает при $x \in (-1; 1]$.

Функция имеет один экстремум – минимум в точке $x_1 = 1$, при этом $y_{\min} = y(1) = 0$.

3. $y = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}$. Здесь $D(y) = R$.

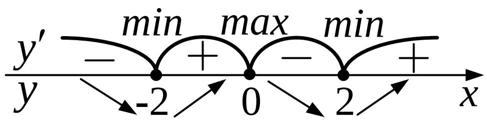
$$y' = \frac{2}{3}(x^2-4)^{-1/3} \cdot 2x = \frac{4x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)(x-2)}}.$$

Критические точки $y'(x)$:

а) $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \in D(y)$;

б) y' – не существует $\Rightarrow x_2 = -2,\ x_3 = 2 \in D(y)$.

Схема перемены знаков производной $y'(x)$:



Из построенной схемы видно, что интервалы возрастания функции $(-2; 0) \cup (2; +\infty)$, интервалы её убывания $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$. Функция имеет три экстремума: гладкий максимум в точке $x_1 = 0$ и два уголковых минимума в точках $x_{2,3} = \pm 2$. Причем $y_{\max} = y(0) = \sqrt[3]{16}$, $y_{\min} = y(\pm 2) = 0$.

Найти наибольшее (M) и наименьшее (m) значения функции $f(x)$ на заданном отрезке $[a;b]$.

4. $f(x)=x^3-3x$, $[-2;3]$.

Так как непрерывная функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений на отрезке либо в его внутренних критических точках, либо на его концах, то находим критические точки производной $y'(x)$:

$y'=3x^2-3=3(x-1)(x+1)\Rightarrow\ y'=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm1\in[-2;3]$.

Тогда, вычисляя значения функции $f(-2)=-8+6=-2$; $f(-1)=-1+3=2$; $f(1)=1-3=-2$; $f(3)=27-9=18$ и сравнивая их, получаем $M=f(3)=18$, $m=f(-2)=f(1)=-2$.

5. $f(x)=1+x\,e^{-x}$, $[0;2]$. Находим $f'(x)=e^{-x}\cdot(1-x)$.

Критическая точка $x_0=1\in[0;2]$. Тогда $f(0)=1$, $f(1)=1+e^{-1}=1+1/e$, $f(2)=1+2e^{-2}=1+2/e^2$. Сравнивая эти значения, имеем $M=f(1)=1+1/e$, $m=f(0)=1$.

12.2.2. Интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции

Определение. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется **выпуклым** (**вогнутым**) на интервале $(a;b)$, если все точки графика $y=f(x)$ расположены ниже (выше) точек любой касательной, проведенной к нему на этом интервале, кроме точек касания (см. рис. 12.2).

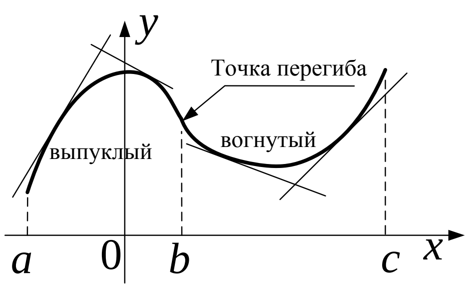


Рис. 12.2

Теорема 12.4. *Достаточные условия выпуклости (вогнутости)*

Если функция $y=f(x)$ дважды дифференцируема на $(a;b)$ и для $\forall x\in(a;b)$: $f''(x)<0$ $(f''(x)>0)$, то график функции $y=f(x)$ – выпуклый (вогнутый) на $(a;b)$.

С учетом условий выпуклости и вогнутости графика дифференцируемой функции можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 12.5. *Второй достаточный признак экстремума*

Если для дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ точка $x_0 \in D(y)$ является критической точкой первой производной $f'(x)$, где $f'(x_0) = 0$ и $\exists f''(x_0) \neq 0$, то $f(x_0)$–экстремальное значение функции; причем, если $f''(x_0) < 0$, то $f(x_0)$–максимум, а если $f''(x_0) > 0$, то $f(x_0)$–минимум.

Определение. Точка $M_0(x_0,\ f(x_0))$ на графике непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая выпуклую и вогнутую его части, называется **точкой перегиба** графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 12.2). На рис. 12.1 такими точками являются точки графика с абсциссами x_2 и x_5.

Из теоремы 12.4 следует, что абсциссы **возможных точек перегиба** надо искать среди точек, в которых либо $f''(x) = 0$, либо $f''(x)$ не существует, т.е. среди **критических точек второй производной.**

На основании определения точки перегиба и теоремы 12.4 можно сформулировать *достаточный признак точки перегиба*.

Теорема 12.6. Пусть $f''(x)$ существует в некоторой окрестности своей критической точки $x_0 \in D(f)$. Тогда, если при переходе через x_0 производная $f''(x)$ меняет свой знак, то точка $M_0(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика непрерывной функции $y = f(x)$. В противном случае в точке M_0 перегиба нет.

Примеры. Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции $y = f(x)$.

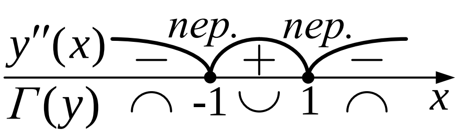
1. $y = \ln(1 + x^2)$. Здесь $D(y) = R$.

$$y' = \frac{2x}{1 + x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2(1 + x^2) - 2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 + x)(1 - x)}{(1 + x^2)^2}.$$

Критические точки $y''(x)$: **а)** $y'' = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1 \in D(y)$;

б) y''– не существует $\Rightarrow$ таких точек нет.

Схема перемены знаков производной $y''(x)$.



Итак, график функции имеет два интервала выпуклости $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ и интервал вогнутости $(-1; 1)$. При этом точки $x_{1,2} = \pm 1$ являются абсциссами точек перегиба графика. А так как $y_{пер} = y(\pm 1) = \ln 2$, то точками перегиба графика функции являются точки $M_1(-1; \ln 2)$ и $M_2(1; \ln 2)$.

2. $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$. Здесь $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

$$y' = -\frac{1}{x^2} + 8x \Rightarrow y'' = \frac{2}{x^3} + 8 = \frac{2(1+4x^3)}{x^3}.$$

Критические точки y'': **а)** $y'' = 0 \Rightarrow x_1 = -1/\sqrt[3]{4} \in D(y)$;

б) y'' – не существует $\Rightarrow x_2 = 0 \notin D(y)$.

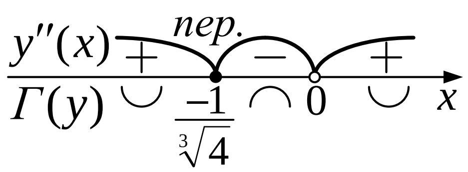


Схема перемены знаков производной y''.

График функции имеет два интервала вогнутости $(-\infty; -1/\sqrt[3]{4}) \cup (0; +\infty)$ и один интервал выпуклости $(-1/\sqrt[3]{4}; 0)$. При этом перегиб только в точке $x_1 = -1/\sqrt[3]{4}$, $y_{пер} = y(-1/\sqrt[3]{4}) = 0$, т.е. точка перегиба $M_0(-1/\sqrt[3]{4}; 0)$.

12.2.3. Асимптоты графика функции

Определение. Прямая называется **асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $M\big(x; f(x)\big)$ графика до этой прямой стремится к нулю при бесконечном удалении точки M (по графику) от начала координат (см. рис. 12.3).

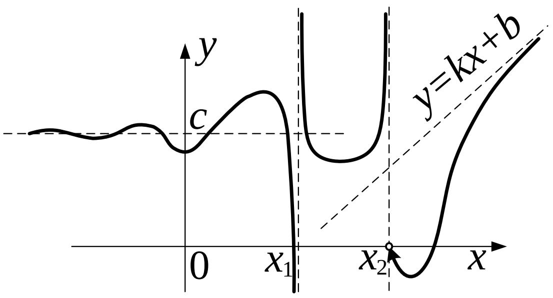


Рис. 12.3

Различают вертикальные и наклонные асимптоты. При этом прямая $x = x_0$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x)$ бесконечен, т.е. вертикальные асимптоты могут быть в точках бесконечных разрывов функции, а также в конечных границах области определения. Поэтому вертикальных асимптот у графика функции может быть сколь угодно много (например, $y = \operatorname{tg} x$).

Наклонные асимптоты графика имеют уравнение $y = kx + b$ и характеризуют "асимптотическое" поведение функции при $x \to \pm\infty$. Поэтому максимальное их количество равно двум (при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$).

Разумеется, многие функции не имеют ни одной асимптоты (ни вертикальной, ни наклонной). На рис. 12.3 изображен график функции, имеющий две вертикальные асимптоты $x = x_1$ и $x = x_2$, одну горизонтальную $y = c$ и одну наклонную $y = kx + b$.

Если график функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \pm\infty$, то расстояние между ними стремится к нулю при $x \to \pm\infty$, следовательно и $\lim\limits_{x \to \pm\infty}(y_ф - y_{ac}) = 0$, т.е. при $x \to \pm\infty$ $y_ф - y_{ac} = \alpha(x) - БМ$. Тогда функцию можно представить в виде

$$y = f(x) = kx + b + \alpha(x), \text{ где } \lim_{x \to \pm\infty} \alpha(x) = 0.$$

Разделив полученное равенство на x и переходя к пределу при $x \to \pm\infty$, получаем $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(k + \dfrac{b}{x} + \dfrac{\alpha(x)}{x}\right) = k$.

Так как $f(x) - kx = b + \alpha(x)$, то $\lim\limits_{x \to \pm\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to \pm\infty}(b + \alpha(x)) = b$.

Итак, прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой, если

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty}\big(f(x) - kx\big).$$

Примеры. Найдите асимптоты графика функции.

1. $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$. Так как согласно ООФ $x \neq -1$, то проверим, не является ли прямая $x = -1$ вертикальной асимптотой: $\lim\limits_{x \to -1 \pm 0}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 = \left(\dfrac{-2}{\pm 0}\right)^2 = +\infty$

$\Rightarrow$ $x = -1$ – вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты ищем в виде $y = kx + b$,

где $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = 0$, т. к. 2 < 3, т.е. $k = 0$.

Тогда $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty}(y(x) - kx) = \lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 = 1^2 = 1 \Rightarrow$

$y=1$ – наклонная (горизонтальная) асимптота.

2. $y=\dfrac{x^2-2x}{2x-3}$. Так как $2x-3\neq 0$, т.е. $x\neq 3/2$, то находим

$$\lim_{x\to 3/2\mp 0}\frac{x^2-2x}{2x-3}=\left(\frac{9/4-3}{3\mp 0-3}\right)=\left(\frac{-3/4}{\mp 0}\right)=\pm\infty \Rightarrow$$

$x=3/2$ – вертикальная асимптота.

Для наклонных асимптот имеем уравнение $y=kx+b$,

где $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-2x}{2x^2-3x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\dfrac{1}{2}$, т.к. 2=2. Тогда

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-2x}{2x-3}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{2(2x-3)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-\frac{1}{4}.$$

Итак, $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$ – наклонная асимптота.

3. $y=xe^{2x}$. $D(y)=R \Rightarrow$ вертикальных асимптот нет.

Наклонные асимптоты $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}e^{2x}=\begin{cases}+\infty & \text{при} \quad x\to+\infty\\ 0 & \text{при} \quad x\to-\infty\end{cases}.$$

Т.е. при $x\to+\infty$ наклонной асимптоты нет (т.к. $k=\infty$).

Тогда $b=\lim\limits_{x\to-\infty}(y(x)-kx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x}-0\right)=(\infty\cdot 0)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-2x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\overset{(\Lambda)}{=}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-2e^{-2x}}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0.$$

Итак, график имеет лишь одну асимптоту $y=0$ при $x\to-\infty$.

12.2.4. Полное исследование функции и построение графика

Приведем **алгоритм исследования** функции и построения ее графика.

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать функцию на четность.

3. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрывов и определить их характер.

4. Найти асимптоты графика функции (вертикальные и наклонные).

5. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции.

6. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба.

7. Найти в качестве вспомогательных точки пересечения графика функции с осями координат (причем с осью Ox – по возможности).

8. Используя результаты исследования, построить график функции.

Пример. Исследовать функцию и построить график

$y = x - \dfrac{8}{x^4}$. Здесь $D(y) = (-\infty;0) \bigcup (0;+\infty)$.

Так как $y(-x) = -x - \dfrac{8}{x^4} \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, то функция ни четная, ни нечетная (общего типа), т.е. ее график не симметричен ни относительно оси Oy, ни относительно начала координат.

Исследуем точку $x_0 = 0$ на характер разрыва. Так как $y(0)$ не существует, то здесь – разрыв. Причем

$$\Lambda = \lim_{x \to -0} \left(x - \frac{8}{x^4} \right) = -\infty; \ \Pi = \lim_{x \to +0} \left(x - \frac{8}{x^4} \right) = -\infty \Rightarrow$$

В точке $x_0 = 0$–бесконечный разрыв (2-го рода), т.е. прямая $x_0 = 0$– вертикальная асимптота.

Для отыскания уравнения $y = kx + b$ наклонных асимптот вычисляем

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{8}{x^5} \right) = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x - \frac{8}{x^4} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{8}{x^4} \right) = 0.$$

Значит, график имеет еще одну–наклонную асимптоту $y = x$.

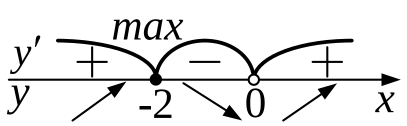
Для решения вопроса об интервалах монотонности функции и ее экстремумах находим производную:

$y' = 1 + \dfrac{32}{x^5} = \dfrac{x^5 + 32}{x^5}$. Ее критические точки:

а) $y' = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt[5]{-32} = -2 \in D(y)$

б) y'–не существует $\Rightarrow x_2 = 0 \notin D(y)$.

Строим схему перемены знаков для $y'(x)$



Тогда функция возрастает при $x \in (-\infty;-2] \bigcup (0;+\infty)$ и убывает при $x \in [-2;0)$.

При этом $y(-2) = y_{\max} = -2 - \dfrac{8}{16} = -2{,}5$ – экстремальное значение функции.

Находя $y'' = -\dfrac{160}{x^6}$, замечаем, что y'' имеет лишь одну критическую точку $x_0 = 0$, не входящую в ООФ, и переходя через нее не меняет своего знака, т.е. при $\forall x \in D(y)$ $y'' < 0$, следовательно, график всюду выпуклый (имеет два интервала выпуклости $(-\infty;0) \bigcup (0;+\infty)$) и не имеет ни одной точки перегиба.

Для более точного построения графика находим точки пересечения его с осями Ox и Oy. Так как $x \neq 0$, то график не пересекается с осью Oy (это его вертикальная асимптота). При $y = 0$ имеем $x = \dfrac{8}{x^4}$, т.е. $x^5 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[5]{8}$ – точка пересечения с осью Ox.

Наконец, по результатам проведенных исследований строим график функции $y = x - \dfrac{8}{x^4}$, начиная с нанесения на плоскость xOy асимптот и всех характерных (критических) его точек, и согласуя поведение функции и характер графика со схемами знаков y' и y''.

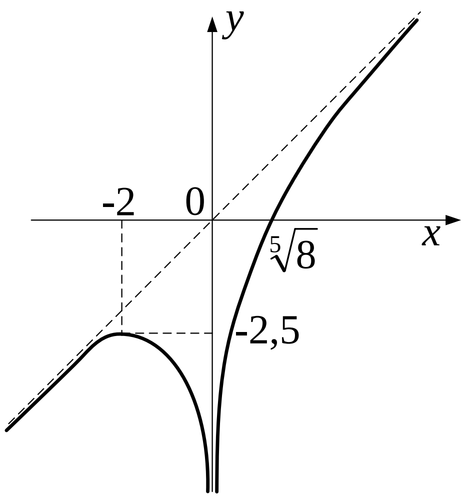


Рис. 12.4