ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

11.1. Понятие производных и дифференциалов высших порядков

11.1.1. Производная $n-$го порядка

Из определения производной функции $y = f(x)$ в точке x следует, что сама производная $f'(x)$ является тоже некоторой функцией аргумента x, определенной в промежутке дифференцируемости функции $f(x)$. Значит, можно говорить о существовании и нахождении производной от $f'(x)$. При этом производная $f'(x)$ называется производной первого порядка (или первой производной) функции $f(x)$, а производная от производной $f'(x)$ называется производной второго порядка (или второй производной) функции $f(x)$ и т.д. **Производная от производной $n-1$–го порядка называется производной $n-$го порядка** (или $n-$й производной) функции $f(x)$. Начиная со второй, производные называются производными высших порядков и обозначаются y'', y''', $y^{(4)}$, $y^{(5)},\ldots,y^{(n)},\ldots$ или $f''(x), f'''(x)$, $f^{(4)}(x),\ldots, f^{(n)}(x),\ldots$.

Например, для функции $y = x^3$:

$y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y''' = 6$, $y^{(4)} = y^{(5)} = \ldots = y^{(n)} = 0$.

Физический смысл второй производной в том, что $S''(t) = (S'(t))' = V'(t) = a(t)$ – мгновенное ускорение при прямолинейном движении по закону $S = S(t)$.

11.1.2. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в каждой точке x некоторого промежутка X. Тогда ее дифференциал $dy = f'(x)dx$, называемый дифференциалом первого порядка, является функцией двух параметров: аргумента x и его дифференциала dx. Однако, считая здесь

$dx = \Delta x = const$, имеем выражение dy, зависящее лишь от одной переменной *x*. Тогда его дифференциал, согласно определению дифференциала имеет вид: $d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2$, обозначается $d^2y = y''(x)dx^2$ и называется дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ в точке *x*. Аналогично вводится понятие дифференциала третьего, четвертого порядков и т.д.:

$$d^3y = y'''(x)dx^3; \quad d^4y = y^{(4)}\,dx^4;\ldots, d^ny = y^{(n)}\,dx^n.$$

d^ny называется **дифференциалом** $n-$**го порядка** (или $n-$м дифференциалом) функции $y = f(x)$. Из формулы дифференциала следует, что для любого n справедливо равенство, которое также является формальной записью (обозначением) производных: $y^{(n)}(x) = \dfrac{d^ny}{(dx)^n} = \dfrac{d^ny}{dx^n}$, т.е. $n-$я производная функции $y = f(x)$ в точке x равна отношению $n-$го дифференциала этой функции в точке x к $n-$й степени дифференциала аргумента.

11.2. Примеры решения задач.

1. Найти y', пользуясь правилами и формулами дифференцирования:

а)

$$y = \sqrt[5]{\ln^2(3\arcsin 5x)} \Rightarrow y' = \frac{2}{5}\ln^{-3/5}(3\arcsin 5x)\cdot\frac{1}{3\arcsin 5x}\cdot\frac{3}{\sqrt{1-25x^2}}\cdot 5;$$

б) $y = \left(\pi^2 + \arcsin x^2\right)\cdot 3^{tg2x} \quad \Rightarrow \quad y' = \left(\pi^2 + \arcsin x^2\right)'\cdot 3^{tg2x} +$

$$+\left(\pi^2 + \arcsin x^2\right)\cdot\left(3^{tg2x}\right)' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\cdot 3^{tg2x} + \left(\pi^2 + \arcsin x^3\right)\cdot 3^{tg2x}\cdot\ln 3\cdot\frac{2}{\cos^2 2x}.$$

в) $y = \dfrac{4\sin^3 5x}{\cos x^3} \quad \Rightarrow \quad y' = 4\dfrac{\left(\sin^3 5x\right)'\cos x^3 - \sin^3 5x\left(\cos x^3\right)'}{\left(\cos x^3\right)^2} =$

$$= \frac{4}{\cos^2 x^3}\cdot\left(3\sin^2 5x\cdot\cos 5x\cdot 5\cos x^3 - \sin^3 5x(-\sin x^3)\cdot 3x^2\right);$$

г) $y=(\ln x)^{\cos x} \;\Rightarrow\; y'=\cos x\,(\ln x)^{\cos x-1}\cdot\frac{1}{x}+(\ln x)^{\cos x}\cdot\ln(\ln x)\cdot(-\sin x)$;

д) $x^2+y^3+e^{xy}=0$. Так как функция $y(x)$ задана неявно, то, дифференцируя уравнение по x с учетом, что $x'=1$, а y' – искомая производная, получим

$$2x+3y^2y'+e^{xy}(y+xy')=0 \;\Rightarrow\; y'(3y^2+xe^{xy})=-2x-ye^{xy} \;\Rightarrow$$

$$y'=-\frac{2x+ye^{xy}}{3y^2+xe^{xy}};$$

е) $\begin{cases} y=5t-\cos^2 5t \\ x=t^2\sin 5t \end{cases} \Rightarrow y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{5-2\cos 5t\cdot(-\sin 5t)\cdot 5}{2t\sin 5t+t^2\cos 5t\cdot 5}=\frac{5(1+\sin 10t)}{2t\sin 5t+5t^2\cos 5t}.$

3. Найти y'', т.е. $\frac{d^2y}{dx^2}$, если

а) $y=(x^2+1)arctgx \Rightarrow y'=2xarctgx+(x^2+1)\cdot\frac{1}{1+x^2}=1+2xarctgx \Rightarrow$

$$y''=(y')'=2arctgx+\frac{2x}{1+x^2};$$

б) $\begin{cases} y=t-\cos t \\ x=t+\sin t \end{cases} \Rightarrow y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{1+\sin t}{1+\cos t}$, тогда

$$y''_{xx}=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\cos t(1+\cos t)+\sin t(1+\sin t)}{(1+\cos t)^2\cdot(1+\cos t)}=\frac{\cos t+\sin t+1}{(1+\cos t)^3};$$

4. Найти значение производной функции в заданной точке, т.е. $y'(x_0)$, если

а) $y=x\cos x+e^{2x}$, $x_0=0. \Rightarrow y'=\cos x-x\sin x+2e^{2x} \Rightarrow$
$\Rightarrow y'(0)=1-0+2=3;$

б) $y=\begin{cases} 2+1/(x+1) & \text{при} \quad x<0, \\ 1-\sin x & \text{при} \quad x\ge 0, \end{cases}$ $x_0=0.$

Т.к. функция $y(x)$ в точке $x_0=0$ непрерывна ($\Lambda=\Pi=y(0)=1$), то можно говорить об односторонних производных функции $y(x)$ в точке $x_0=0$. Причем, при $x<0$ $y'(x)=-1/(x-1)^2$, а при $x>0$ $y'(x)=-\cos x$, т.е. в точке $x_0=0$ односторонние производные совпадают $y'(-0)=y'(+0)=-1$. Следовательно в точке $x_0=0$ функция $y(x)$ имеет производную $y'(0)=-1;$

в) $y=\sqrt[3]{x}$, $x_0=0$. Т.к. $y'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ при $x\neq 0$, то найдем $y'(0)$ по определению производной: $y'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{0+\Delta x}-\sqrt[3]{0}}{\Delta x}=$
$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}=+\infty$. Можно заметить, что тот же результат в пределе имеет $y'(x)$, т.е. $y'(0)=\lim\limits_{x\to 0}y'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$. Итак, функция $y=\sqrt[3]{x}$ имеет в точке $x_0=0$ бесконечную производную со знаком + ;

г) $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x_0=0$. Здесь, аналогично предыдущей задаче, вычисляя производную в точке $x_0=0$ либо по определению, либо устремляя $x\to\pm 0$ в выражении $y'_{(x)}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, получим, что $y'(-0)=-\infty\neq y'(+0)=+\infty$, т.е. $y'(0)$ не существует ни конечная, ни бесконечная;

д) $\begin{cases} y=\sqrt{t-1}+e^{t-2}, \\ x=t^2-2t, \end{cases}$ $x_0=0$. Найдем значение t_0, соответствующее значению $x_0=0$. С учетом того, что функция $y(x)$ определена при условии $t\geq 1$, где $x(t)$ – строго монотонна (правая ветвь параболы), из $x_0=0 \;\Rightarrow\; t^2-2t=0 \;\Rightarrow\; t(t-2)=0$, т.е. $t_0=2$, т.к. $t_1=0\notin[1;+\infty)$.

Тогда, находя $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}+e^{t-2}}{2t-2}$, имеем

$$y'_x(x_0)=y'_x\Big|_{t=2}=\frac{(1/2)+1}{4-2}=\frac{3}{4};$$

е) $xy^2-y+3e^{xy}=0$, $x_0=0$. Из уравнения неявного задания функции $y(x)$ при $x=x_0=0$ находим значение $y(x_0)=y(0)=3$. Затем, дифференцируя уравнение по x: $y^2+x2yy'-y'+3e^{xy}(y+xy')=0$ и подставляя $x=x_0=0$, $y=y(0)=3$, получаем $9+0-y'+3(3+0)=0$, т.е. $y'(0)=18$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0, если:

а) $y = 2xe^{x-1}$, $x_0 = 1$. Для составления уравнений касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ и нормали $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, находим

$f(x_0) = 2$, $f'(x) = y'(x) = 2e^{x-1} + 2xe^{x-1} \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 4.$
Тогда касательная $y = 2 + 4(x-1)$, т.е. $y = 4x - 2$,

нормаль $y = 2 - \dfrac{1}{4}(x-1)$, т.е. $x + 4y - 9 = 0$;

б) $y = x + \sin x + e^{-2x}$, $x_0 = 0$. $\Rightarrow f(x_0) = y(0) = 1$;

$f'(x) = 1 + \cos x - 2e^{-2x} \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = 0$, тогда касательная параллельна оси Оx, и ее уравнение $y = f(x_0)$, т.е. $y = 1$, а нормаль проходит через точку $\left(x_0,\ f(x_0)\right)$, т.е. (0; 1) параллельно оси Оy, поэтому имеет уравнение x=0;

в) $\begin{cases} y = \sqrt{2}\cos t, \\ x = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $x_0 = x\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. $x_0 = 2\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 2$. Так как

$t_0 = \dfrac{\pi}{4}$, то $y_0 = y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 1$. $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{-\sqrt{2}\sin t}{2\sqrt{2}\cos t} = -\dfrac{tgt}{2}$

$\Rightarrow f'(x_0) = y'_x\Big|_{t=\pi/4} = -\dfrac{tg\,(\pi/4)}{2} = -\dfrac{1}{2}$. Тогда уравнение касательной

$y = 1 - \dfrac{1}{2}(x-2)$, т.е. $x + 2y - 4 = 0$, уравнение нормали: $y = 1 + 2(x-2)$, т.е.

$y = 2x - 3$.

6. Материальная точка движется вдоль оси Ox по закону $x = (t-1)^3(t-3)^2$ (начало движения при $t = t_0 = 0$). Найти ускорение a и отклонение Δx от начального положения мат. точки в моменты ее первой и последней остановок.

Моменты остановок найдем из условия равенства нулю скорости движения при $t > 0$. Для этого находим мгновенную скорость:
$V(t) = x' = 3(t-1)^2(t-3)^2 + 2(t-3)(t-1)^3 = (t-1)^2(t-3)(5t-11)$. Тогда $V(t) = 0$ при $t_1 = 1$, $t_2 = \dfrac{11}{5} = 2\dfrac{1}{5}$, $t_3 = 3$. Так как $0 < 1 < 2\dfrac{1}{5} < 3$, то моментами первой и последней остановок движущейся точки соответственно будут $t_1 = 1$ и $t_3 = 3$. Находя мгновенное ускорение

$a(t)=V'(t)=x''=2(t-1)(t-3)(5t-11)+(t-1)^2(5t-11)+5(t-1)^2(t-3)$,
имеем $a(t_1)=a(1)=0,\ a(t_3)=a(3)=2^2\cdot 4=16.$

Так как начальное положение точки $x(t_0)=x(0)=-9$, а $x(t_1)=x(t_3)=0$, т.е. точка в моменты первой и последней (3-й) остановок находилась в одном и том же положении (в начале координат), то отклонения (перемещение) движущейся точки за время t_1 и t_3 будут равны $\Delta x_3=\Delta x_1=$ $=x(t_1)-x(t_0)=0-(-9)=9.$

7. Записать дифференциалы dy и d^2y функции $y=x^2-x\sin x$:
$dy=y'dx=(2x-\sin x-x\cos x)dx$;
$d^2y=y''dx^2=(2-\cos x-\cos x+x\sin x)dx^2=(2-2\cos x+x\sin x)dx^2$.

8. Линеаризировать в окрестности точки $x_0=1$ функцию $f(x)=\sqrt{(2x^2+7)^3}+\ln x$ и вычислить приближенно ее значение с помощью дифференциала (линеаризации) в точке $x_1=0{,}98$.

Так как $f'(x)=\dfrac{3}{2}(2x^2+7)^{1/2}\cdot 4x+\dfrac{1}{x}$ и $x_1=0{,}98=x_0+\Delta x=1-0{,}02$, то, вычисляя $f(x_0)=f(1)=\sqrt{9^3}+\ln 1=27$ и $f'(x_0)=f'(1)=6\sqrt{9}+1=19$ и используя формулу линеаризации функции $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, получим в окрестности точки $x_0=1$ $f(x)\approx 27+19(x-1)=19x+8$ и соответственно $f(0{,}98)=f(1-0{,}02)\approx 27+19(-0{,}02)=26{,}62$.

Изучив технику дифференцирования и познакомившись с геометрическим смыслом производной, рассмотрим широко использующиеся как в теории, так и на практике, методы исследования функций и построения их графиков.

11.3. Основные теоремы дифференциального исчисления

11.3.1. Теоремы о среднем

Теорема 11.1. *(теорема Ферма)*. Пусть в интервале $(a;b)$ определена функция $f(x)$, которая в некоторой точке $x_0\in(a;b)$ имеет наибольшее или наименьшее значение. Тогда или $f'(x_0)=0$, или $f'(x_0)$ не существует.

Для дифференцируемой на $(a;b)$ функции $f(x)$ **геометрический смысл** теоремы Ферма в том, что, если такая функция имеет в точке $x_0 \in (a;b)$ наибольшее или наименьшее значение, то в точке $(x_0; f(x_0))$ касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси Ox.

Теорема 11.2. *(теорема Ролля)*. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема в $(a;b)$ и имеет равные значения на концах отрезка: $f(a) = f(b)$. Тогда существует хотя бы одно значение $c \in (a;b)$ такое, что $f'(c) = 0$.

Доказательство. В силу непрерывности $f(x)$ на $[a;b]$, функция $f(x)$ имеет на этом отрезке наибольшее M и наименьшее m значения, т.е. $\exists\ x_1, x_2 \in [a;b]$ такие, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ и при этом $m \le f(x) \le M$. Здесь возможны два случая:

а) если $m = M$, то $f(x) = const = m = M$. Тогда $f'(x) = 0$ при $\forall x \in [a;b]$ и теорема доказана.

б) Если $m < M$, то с учетом условия $f(a) = f(b)$ можно утверждать, что хотя бы одно из значений m или M принимается функцией $f(x)$ в некоторой внутренней точке $c \in (a;b)$. Но тогда, в силу дифференцируемости функции $f(x)$ в точке c, из теоремы Ферма следует, что $f'(c) = 0$. Что и требовалось доказать.

Теорему Ролля, по понятной причине, называют **теоремой о корнях производной** дифференцируемой функции.

Геометрически она означает, что у графика функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы, существует на $(a;b)$ точка $(c; f(c))$, в которой касательная параллельна оси $0x$ (см. рис. 11.1).

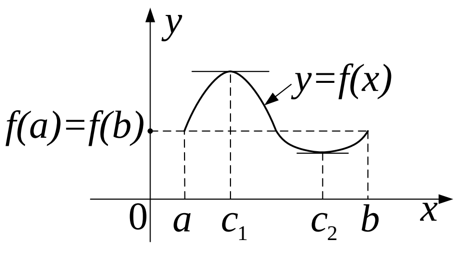

Рис. 11.1.

Теорема 11.3. *(теорема Коши)*. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a;b]$, дифференцируемы в $(a;b)$ и при $\forall x \in (a;b)\ : \varphi'(x) \ne 0$, то существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Для **доказательства** теоремы, во-первых, заметим, что, согласно теоремы Ролля, $\varphi(b) \neq \varphi(a)$, т.к. $\varphi'(x) \neq 0$. Во-вторых, рассмотрим на $[a;b]$ вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\left(\varphi(x) - \varphi(a)\right).$$

Нетрудно видеть, что $F(x)$ на $[a;b]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля (непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема в $(a;b)$ и $F(a) = 0 = F(b)$). Тогда по теореме Ролля для функции $F(x)$ существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $F'(c) = 0,$ т.е. $F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot \varphi'(c) = 0.$

Откуда, учитывая, что $\varphi'(c) \neq 0$, получаем доказываемую формулу Коши:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Теорема 11.4 *(теорема Лагранжа)*. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема в $(a;b)$, то существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ или $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$.

При этом последнее равенство называется формулой Лагранж**а или формулой конечных приращений.**

Теорема Лагранжа непосредственно следует из теоремы Коши при $\varphi(x) = x$, тогда $\varphi(b) - \varphi(a) = b - a$, $\varphi'(c) = 1$.

В силу того, что величина $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ является угловым коэффициентом секущей (хорды) M_1M_2 графика функции $y = f(x)$ (где $M_1(a; f(a))$, $M_2(b; f(b))$), а $f'(c)$ − угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $(c; f(c))$, **геометрический смысл** теоремы Лагранжа заключается в том, что в интервале $(a;b)$ существует, по крайней мере, одна точка c, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна секущей (хорде) M_1M_2 (см. рис. 11.2).

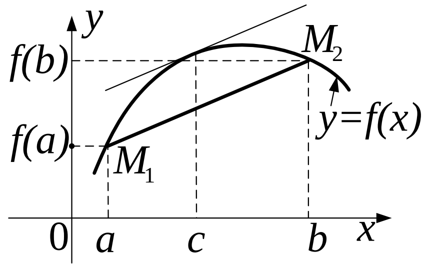

Рис.11.2

11.3.2. Правило Лопиталя

Довольно эффективным методом вычисления пределов с использованием производных является так называемое правило Лопиталя, которое применяется непосредственно лишь для раскрытия неопределенностей вида $(0/0)$ и (∞/∞). Любую другую неопределенность (например, $(\infty-\infty)$, $(0\cdot\infty)$, (1^{∞}), $(0^{0})(\infty^{0})$) надо сначала свести к одной из неопределенностей $(0/0)$ или (∞/∞), после чего уже можно применять правило Лопиталя, содержание которого заключено в следующей теореме.

Теорема 11.5 *(теорема Лопиталя)*. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и дифференцируемы в окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, и пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ или ∞, $\varphi(x)\neq 0$ и $\varphi'(x)\neq 0$ в этой окрестности. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при неопределенности $(0/0)$ или (∞/∞), и при этом имеет место равенство $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Правило Лопиталя следует комбинировать с применением эквивалентных множителей с элементарными преобразованиями выражения, стоящего под знаком предела, отделяя при этом множители, не участвующие в создании неопределенности. При необходимости, правило Лопиталя можно применять многократно при вычислении одного предела (если выполняются условия теоремы 11.5).

Следует заметить, что при вычислении предела функции дискретного (например, натурального) аргумента n (числовой последовательности) правило Лопиталя непосредственно применять нельзя, ибо для такой функции понятие производной не определено. Однако можно использовать так называемую **теорему о "погружении" дискретного аргумента в непрерывный**:

Если $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\text{A}$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(n)=\text{A}$, $(x\in R,\ n\in N)$.

А для вычисления $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ уже можно применять правило Лопиталя.

Обратное утверждение неверно. **Например**,

$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{\pi(2n^2+1)}{n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\cos 2\pi n=1$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{\pi(2x^2+1)}{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\cos 2\pi x$ не существует ни конечный, ни бесконечный.

Будем обозначать факт применения правила Лопиталя символом (Λ), поставленным над знаком равенства, т.е. $\overset{(\Lambda)}{=}$.

Приводя **примеры вычисления пределов по правилу Лопиталя**, отметим наиболее характерные ошибки при его применении: не следует путать правило Лопиталя с производной дроби (частного), а также, в случае несуществования предела отношения производных, не следует делать ошибочный вывод о несуществовании предела отношения функций, при этом просто **не применимо правило** Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin 2x}{e^{3x}-\cos x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{(\Lambda)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+\sin 2x)'}{(e^{3x}-\cos x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2\cos 2x}{3e^{3x}+\sin x}=\dfrac{3}{3}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+\cos x}{5x+\sin x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=?$ Заметим, что здесь правило Лопиталя не применимо, т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+\cos x)'}{(5x+\sin x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\sin x}{5+\cos x}$–не существует.

Поэтому, применяя правило 1, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\cos x}{5x+\sin x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3+(\cos x)/x}{5+(\sin x)/x}=\frac{3+0}{5+0}=\frac{3}{5}.$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} n}{\arcsin(\pi/n)}=\ln\left(\dfrac{0}{0}\right)=\ln\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\pi/x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{(\Lambda)}{=}$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{(\pi-2\operatorname{arctg} x)'}{(\pi/x)'}=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{-2/(1+x^2)}{-\pi/x^2}=\ln\left(\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{(\Lambda)}{=}\ln\left(\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}\right)=\ln\frac{2}{\pi}.$$

4. $\lim\limits_{x\to+0}(\ln x\cdot\sin x)=(-\infty\cdot 0)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{1/\sin x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\overset{(\Lambda)}{=}$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{(-1/\sin^2 x)\cos x}=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=-\lim_{x\to+0}\frac{x^2}{x\cos x}=0.$$

В случае неопределенностей (0^0), (1^∞), (∞^0) сначала, логарифмируя искомый предел, сводят указанные неопределенности к виду $(0/0)$ или (∞/∞), затем применяют правило Лопиталя.

5. $\lim\limits_{x\to 1+0}(x^2-1)^{x-1}=(0^0)=\mathrm{A}=?\Rightarrow\ln\mathrm{A}=\ln\lim\limits_{x\to 1+0}(x^2-1)^{x-1}=$

$$= \lim_{x\to 1+0} \ln(x^2-1)^{x-1} = \lim_{x\to 1+0} \left((x-1)\ln(x^2-1)\right) = (0\cdot\infty) =$$

$$= \lim_{x\to 1+0} \frac{\ln(x^2-1)}{1/(x-1)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{(\Lambda)}{=} \lim_{x\to 1+0} \frac{2x/(x^2-1)}{-1/(x-1)^2} = -2\lim_{x\to 1+0} \frac{x(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = -2\lim_{x\to 1+0} \frac{x(x-1)}{x+1} = 0, \text{ т.е. } \ln \mathrm{A} = 0 \Rightarrow \mathrm{A} = e^0 = 1.$$

6. $\lim\limits_{x\to\pi/2-0} (tgx)^{2x-\pi} = (\infty^0) = \mathrm{A} = ? \Rightarrow \ln \mathrm{A} = \lim\limits_{x\to\pi/2-0} \ln(tgx)^{2x-\pi} =$

$$= \lim_{x\to\pi/2-0} ((2x-\pi)\ln(tgx)) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to\pi/2-0} \frac{\ln(tgx)}{1/(2x-\pi)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{(\Lambda)}{=}$$

$$= \lim_{x\to\pi/2-0} \frac{(1/tgx)(1/\cos^2 x)}{-2/(2x-\pi)^2} = -\lim_{x\to\pi/2-0} \frac{(2x-\pi)^2}{\sin 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(\Lambda)}{=}$$

$$= \lim_{x\to\pi/2-0} \frac{4(2x-\pi)}{2\cos 2x} = 0, \text{т.е. } \ln \mathrm{A} = 0 \Rightarrow \mathrm{A} = e^0 = 1.$$