ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

10.1. Понятие производной, ее геометрический и физический смысл

10.1.1. Задачи, приводящие к понятию производной

Определение. Касательной S к линии $y = f(x)$ в точке $A(x_0; f(x_0))$ называется **предельное положение секущей** AB (см. рис. 10.1), когда точка $B(x; f(x))$ стремится по кривой $y = f(x)$ к точке A.

Задача 1. *Об угловом коэффициенте касательной.*

Возьмем на графике функции $y = f(x)$, непрерывной в точке x_0 и в некоторой ее окрестности $U(x_0)$, точки $A(x_0; f(x_0))$ и $B(x_0 + \Delta x;\ f(x_0 + \Delta x)$, где $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$. Назовем прямую AB секущей, а ее угол наклона к оси Ox обозначим $\varphi = \varphi(\Delta x)$. Как известно, угловой коэффициент прямой AB равен

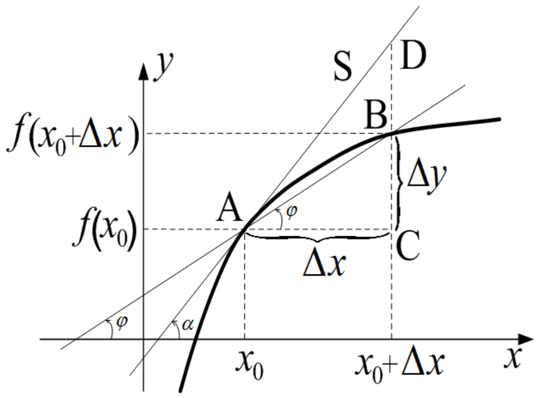

Рис. 10.1

$$k_{AB} = tg\varphi = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Заметим, что, в силу непрерывности функции $f(x)$, при стремлении точки B к точке A по графику $y = f(x)$ будет $\Delta x \to 0$. При этом, если существует касательная S, т.е. предельное положение секущей AB при $A \to B$, то существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$, где $\alpha -$угол наклона касательной S к оси Ox.

Тогда для **углового коэффициента касательной** S имеем

$$k_S = \lim_{B \to A} k_{AB} = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Задача 2. *О мгновенной скорости прямолинейного движения*.

Пусть материальная точка M движется прямолинейно (вдоль оси OS) по закону $S = S(t)$, т.е. функция $S(t)$ определяет положение точки M на оси OS в момент времени t. Тогда за промежуток Δt времени от $t = t_0$ до

$t = t_0 + \Delta t$ точка M перемещается из положения $S(t_0)$ в положение $S(t_0 + \Delta t)$, т.е. совершает перемещение $\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$.

При этом отношение $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ называется **средней скоростью** $(V_{\text{ср.}})$ движения точки M на отрезке времени $[t_0;\ t_0 + \Delta t]$, а **мгновенной** ее **скоростью** $(V_{\text{мгн.}})$ в момент $t = t_0$ называют предел средней скорости при $\Delta t \to 0$, т.е. $V_{\text{мгн.}}(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} V_{\text{ср.}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

10.1.2. Определение производной

Заметим, что обе рассмотренные задачи 1 и 2 привели к одинаковой математической модели. Более того, нетрудно понять, что, так как все естественные, технические и социальные явления и процессы суть перемены, то можно говорить о скоростях их протекания, т.е. при аналитическом описании их неизбежно сталкиваются с математическими моделями, аналогичными полученным в задачах 1 и 2.

Математика рассматривает такую модель для произвольной функции $y = f(x)$, определенной на промежутке X. Возьмем точку $x_0 \in X$ и дадим аргументу x приращение Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in X$. В результате функция $y = f(x)$ получит в точке x_0 приращение $\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Тогда:

Определение. Если существует предел отношения приращения функции Δy в точке x_0 к соответствующему ему приращению аргумента Δx при произвольном стремлении последнего к нулю $(\Delta x \to \pm 0)$, то этот предел и называется **производной функции** $y = f(x)$ в точке x_0.

Обозначают ее символами: $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Итак, $y'(x_0) = f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Причем, если указанный предел конечен, то говорят о конечной производной функции $f(x)$ в точке x_0, а в случае бесконечного предела функция $f(x)$ в точке x_0 или имеет бесконечную производную знака плюс (или знака минус), или не имеет производной ни конечной, ни бесконечной. Подробнее такие ситуации рассмотрим на примерах позже.

Используя понятие односторонних пределов, для функции $f(x)$ в точке x_0 вводят понятия:

левосторонней производной $f'(x_0-0)=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

и **правосторонней производной** $f'(x_0+0)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

При этом имеет место очевидная равносильность:

$(\exists f'(x_0))\Leftrightarrow(\exists f'(x_0-0))(\exists f'(x_0+0))(f'(x_0-0)=f'(x_0+0)=f'(x_0)))$.

Следует заметить, что функция может иметь в точке x_0 односторонние производные, но, в силу их несовпадения, не иметь производной в точке x_0. Такой, например, является функция $f(x)=|x|$ (докажите самостоятельно).

В качестве примера **отыскания производной** функции **по ее определению** найдем производную функции $f(x)=x^3$, определенной на всей числовой оси, в произвольной точке $x\in R$:

$$f'(x)=(x^3)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x-x)((x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)x+x^2)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}((x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)x+x^2)=3x^2\Rightarrow\ (x^3)'=3x^2.$$

10.1.3. Геометрический и физический смысл производной. Касательная и нормаль к графику функции

Из задачи 1 и определения производной следует, что угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0 равен значению производной функции в этой точке, т.е. $k_{\text{кас}}=f'(x_0)$. Используя этот факт **(геометрический смысл производной)** и уравнение пучка прямых, запишем **уравнение наклонной касательной** к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

А так как **нормалью к линии** $y = f(x)$ в точке x_0 называется прямая, проходящая через точку $A(x_0; f(x_0))$ перпендикулярно касательной в этой точке, то **уравнение наклонной нормали в точке** x_0 будет иметь вид $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$. Здесь использовано условие перпендикулярности прямых $k_{\text{норм}} = -1/k_{кас}$.

Сравнивая результаты задачи 2 с определением производной, сформулируем **физический смысл производной**.

При прямолинейном движении мгновенная скорость в момент t_0 есть производная пути (перемещения) $S(t)$ по времени t в точке $t = t_0$, т.е. $V(t_0) = S'(t_0)$. Аналогично запишем для мгновенного ускорения прямолинейного движения $a(t_0) = V'(t_0)$.

Обобщая геометрический и физический смысл производной и применяя понятие скорости изменения функции произвольной природы $y = f(x)$, можно утверждать, что производная $y'(x_0)$ – это мгновенная скорость изменения функции y относительно аргумента x в точке x_0.

10.2. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции. Дифференциал

10.2.1. Понятие дифференцируемости функции

Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой в точке** x_0, если приращение функции Δy в этой точке можно представить в виде суммы двух слагаемых: линейного относительно Δx и более высокого порядка малости, чем Δx при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = A\Delta x + o(\Delta x),$$

где А – некоторое число, не зависящее от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ – БМ при $\Delta x \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

На основании основной теоремы о бесконечно малых и определения производной легко устанавливается следующая связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием производной в этой точке:

Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную. При этом $A = f'(x_0) \neq \infty$ и тогда

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Если функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала X, то говорят, что $f(x)$ **дифференцируема в интервале** X.

10.2.2. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности

Необходимое условие дифференцируемости. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Так как функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение Δy в этой точке может быть представлено в виде $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$, где $f'(x_0) \neq \infty$. Тогда, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = f'(x_0) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim\limits_{\Delta x \to 0} o(\Delta x) = 0,$ что согласно определению означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Следует знать, что доказанное является необходимым условием дифференцируемости, но не достаточным, т.е. обратное утверждение неверно. Функция может быть непрерывной в точке x_0, но не иметь производной в этой точке. Примерами таких функций могут служить функции $y = |x|$, $y = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $x_0 = 0$ и др.

Но если функция разрывна в точке x_0, то она уже не дифференцируема в этой точке.

10.2.3. Дифференциал. Формула приближенного вычисления функции

Пусть для функции $f(x)$ в точке x_0 существует $f'(x_0) \neq \infty$ и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда согласно **(10.2.1)** для приращения функции в точке x_0 можно записать

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Определение. Дифференциалом dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции в этой точке, т.е.

$$dy = f'(x_0)\Delta x.$$

Если же $f'(x_0) = 0$, то слагаемое $f'(x_0)\Delta x = 0$ и оно уже не является главной частью приращения Δy, так как слагаемое $o(\Delta x)$, вообще говоря, отлично от нуля. Но и в этом случае по определению считают дифференциал функции в точке x_0 равным $f'(x_0)\Delta x$, т.е. $dy = 0$.

Покажем, что дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением. Для этого рассмотрим функцию $f(x) = x$, для которой в любой точке x_0 будет $\Delta y = \Delta x \Rightarrow f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$ Тогда $dy = dx = f'(x_0)\Delta x = \Delta x.$

Итак, $dx = \Delta x$ поэтому $dy = f'(x_0)dx.$

Заметим, что введенное ранее одно из обозначений производной $f'(x_0) = \dfrac{dy(x_0)}{dx}$ – неслучайно. Из определения дифференциала функции следует, что производная равна отношению дифференциалов.

Рассматривая на рисунке 10.1 треугольник ACD, выясним геометрический смысл дифференциала функции $y = f(x)$.

Так как $f'(x_0) = k_{\text{кас.}} = tg\alpha$, то $dy = f'(x_0)\Delta x = \Delta x\, tg\alpha = CD.$

Таким образом, **дифференциал** dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 **равен приращению ординаты касательной** к графику этой функции в точке x_0 на отрезке $[x_0;\ x_0 + \Delta x]$.

Из определения дифференциала функции следует, что с точностью до бесконечно малой более высокого порядка малости, чем Δx при $\Delta x \to 0$, имеет место приближенное равенство $\Delta y \approx dy$, т.е. $f'(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx$ $\approx f'(x_0)\Delta x.$ Откуда получаем **формулу приближенного вычисления функции** с помощью дифференциала в окрестности точки x_0.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Делая в последней формуле замену $x = x_0 + \Delta x \Rightarrow \Delta x = x - x_0$, запишем **формулу линеаризации функции** $f(x)$ в окрестности точки x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

10.3. Основные правила и формулы дифференцирования

10.3.1. Правила дифференцирования

1. ***Производная постоянной*** равна нулю, т.е. $C' = 0$. Действительно, для функции $y = C = const$ $\quad \Delta y \equiv 0 \Rightarrow y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$

2. ***Производная аргумента*** равна единице, т.е. $x'_x = t'_t = z'_z = \xi'_\xi = 1.$

Рассмотрим функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$, дифференцируемые в некоторой точке $x \in X$, то есть в точке $x \in X$ $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x) = u'$ и $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x) = v'$. Тогда в точке $x \in X$ выполняются следующие правила:

3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ **4.** $(uv)' = u'v + v'u$ **5**. $(cu)' = cu'$, $c = const$

6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, где $v \neq 0$.

7. ***Производная сложной функции***. Пусть при любом x из интервала X определена сложная функция $y = v(u(x))$, причем $u : X \mapsto U$, и на интервалах X и U существуют производные соответственно функций $u(x)$ и $v(u)$, т.е. $u'(x) = u'$ и $v'(u) = v'$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\big(v(u(x))\big) = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ или } \big(v(u(x))\big)'_x = v'_u \cdot u'_x.$$

Для доказательства этого правила заметим, что изменение аргумента x на величину Δx влечет изменение $u(x)$ на Δu, а при этом функция $v(u)$ получает приращение Δv. Тогда для функции $y = v(u(x))$ в точке $x \in X$ имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = v'_u \cdot u'_x.$$

Здесь $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$, так как функция $u(x)$– дифференцируема$\Rightarrow$непрерывна. Заметим, что правило дифференцирования более сложных функций–с двумя, тремя и большим числом промежуточных переменных остается таким же. **Например**, $\big(w(v(u(x)))\big)'_x = w'_v \cdot v'_u \cdot u'_x$.

8. ***Производная обратной функции.*** Пусть функция $y(x) : X \mapsto Y$

имеет обратную функцию $x(y): Y \mapsto X$ и при $\forall x \in X$ существует $y'(x) \neq 0$. Тогда при $\forall y \in Y$ существует производная обратной функции $x'(y)$, причем $x'(y) = 1/y'(x)$.

Действительно, т.к. $y(x)$–дифференцируема при $x \in X$, то она непрерывна, а при этом обратная функция $x(y)$ тоже непрерывна при $y \in Y$, т.е. $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$. Кроме того, в силу строгой монотонности взаимно–обратных функций, $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$. Тогда

$$x'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta y / \Delta x)} = \frac{1}{y'(x)}.$$

Утверждение доказано.

9. ***Производная функции, заданной параметрически.*** Пусть зависимость $y = f(x): X \mapsto Y$ задана параметрически уравнениями $y = y(t)$, $x = x(t)$, $t \in T$, где $y(t): T \mapsto Y$, $x(t): T \mapsto X$, T–некоторый интервал значений параметра t, и пусть при $\forall t \in T$ существуют производные $y'(t)$ и $x'(t)$, причем $x'(t) \neq 0$. Тогда существует производная функции $y = f(x)$, причем $f'(x) = y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

10. ***Правило дифференцирования функции, заданной неявно***. Пусть функция $y(x)$ задана неявно, т.е. уравнением $F(x, y) = 0$. Так как тождественные функции имеют одинаковые производные, то для нахождения производной y' дифференцируют почленно уравнение неявного задания функции по аргументу x с учетом того, что $x' = 1$, а y'–это искомая производная функции $y(x)$. Затем, оставляя в левой части уравнения члены, содержащие y', и, перенося вправо все члены без y', находят y'.

10.3.2. Формулы дифференцирования основных элементарных функций

Пусть функция $u = u(x)$ определена и дифференцируема на интервале X, т.е. существует $u'(x)$ при $\forall x \in X$. Тогда для производных основных элементарных функций справедливы формулы, список которых представляет так называемую **таблицу производных**:

1. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$ **2**. $(a^{u})' = a^{u} \ln a \cdot u'$ **3**. $(e^{u})' = e^{u} \cdot u'$

4. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ **5**. $(\log_{a} u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$ **6**. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ **8.** $(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^{2} u} \cdot u'$ **9**. $(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^{2} u} \cdot u'$

10. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^{2}}} \cdot u'$ **11**. $(\arccos u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^{2}}} \cdot u'$

12. $(\mathrm{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^{2}} \cdot u'$ **13.** $(\mathrm{arcctg} u)' = \frac{-1}{1+u^{2}} \cdot u'$

14. $(u^{v})' = vu^{v-1} \cdot u' + u^{v} \ln u \cdot v'$, где $v = v(x)$–дифференцируемая функция.

15. $(\mathrm{sh} u)' = \mathrm{ch} u \cdot u'$ **16**. $(\mathrm{ch} u)' = \mathrm{sh} u \cdot u'$ **17**. $(\mathrm{th}\, u)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^{2} u} \cdot u'$

18. $(\mathrm{cth}\, u)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^{2} u} \cdot u'$. Здесь $\mathrm{sh}\, u$, $\mathrm{ch}\, u$, $\mathrm{th}\, u$, $\mathrm{cth}\, u$–гиперболические функции (соответственно: гиперболический синус, косинус, тангенс, котангенс): $\mathrm{sh}\, u = \frac{e^{u} - e^{-u}}{2}$; $\mathrm{ch}\, u = \frac{e^{u} + e^{-u}}{2}$; $\mathrm{th}\, u = \frac{\mathrm{sh}\, u}{\mathrm{ch}\, u} = \frac{e^{u} - e^{-u}}{e^{u} + e^{-u}}$;

$\mathrm{cth}\, u = \frac{\mathrm{ch}\, u}{\mathrm{sh}\, u} = \frac{e^{u} + e^{-u}}{e^{u} - e^{-u}}$.

Докажем некоторые из приведенных формул дифференцирования, используя определение производной, правила дифференцирования 1-8 и метод вычисления пределов с помощью эквивалентных бесконечно малых.

Во всех приведенных ниже доказательствах считаем, что в результате данного аргументу x приращения Δx дифференцируемая функция $u(x)$ принимает приращенное значение $u(x+\Delta x) = u + \Delta u$, принадлежащее области определения рассматриваемой элементарной функции. Разумеется, здесь слагаемое $u = u(x)$ не зависит от Δx, а приращение Δu зависит от Δx, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$ и, в силу необходимого условия дифференцируемости, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$. Тогда

Доказательство 1. Если $y = u^{\alpha}$, то

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u+\Delta u)^{\alpha} - u^{\alpha}}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u^{\alpha}\left(\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{\alpha} - 1\right)}{\Delta x} =$$

$$= u^{\alpha} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta u / u}{\Delta x} = \frac{\alpha u^{\alpha}}{u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \alpha u^{\alpha - 1} \cdot u'.$$

Доказательство 6. Если $y = \sin u$, то

$$y' == \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(u + \Delta u) - \sin u}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta u}{2} \cdot \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \cos u \cdot u'.$$

Доказательство 10. Если $y = \arcsin u$, то $-1 \le u \le 1$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, где $u = u(x)$. Так как функция $y = y(u(x))$ является сложной, то $y' = \frac{dy}{dx} = y'_u \cdot u'$. Для нахождения производной y'_u заметим, что обратная для функции $y = \arcsin u$ функция $u = \sin y$, определенная при $y \in [-\pi/2;\ \pi/2]$, имеет производную $u'_y = \cos y \ne 0$ лишь при $y \in (-\pi/2;\ \pi/2)$, где $\cos y > 0$. Поэтому, для функции $y = \arcsin u$ (как обратной) существует производная при $u \in (-1;1)$, причем $y'_u = \frac{1}{u'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$. Тогда $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$. Формула 10 доказана.

Доказательство 14 проведем, используя правило дифференцирования неявно заданной функции. Для этого сначала прологарифмируем уравнение $y = u^v$. Получим $\ln y = v \ln u$. Дифференцируя полученное уравнение по *x*, имеем $\frac{1}{y} y' = v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'$. Тогда $y' = y\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right)$. Но так как $y = u^v$, то $y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right) = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'$. Формула 14 доказана.