ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Исследование поведения функции с помощью производных

Интервалы монотонности. Экстремумы

Определение. Промежутки, на которых функция $f(x)$ возрастает (убывает), называются промежутками монотонности функции.

Необходимым и достаточным условием строгой монотонности непрерывной функции $f(x)$ на промежутке X является **сохранение знака производной** $f'(x)$ (где она существует) внутри промежутка X, например:
если $\exists f'(x)$ и $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$непрерывная, то $f(x)$ строго возрастает на X;
если $\exists f'(x)$ и $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow$непрерывная, то $f(x)$ строго убывает на X.
Причем здесь условия $f'(x) = 0$ и $f'(x)$ не существуют возможны лишь в конечном числе точек на любом конечном отрезке промежутка X.

Теорема 12.1. Если для $\forall x \in (a;b)$ $\exists f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на $(a;b)$.

Определение. Точки, в которых либо $f'(x)=0$, либо $f'(x)=\infty$, либо $f'(x)$ не существует, называются **критическими точками** первой производной. При этом те из них, где $f'(x)=0$, называются **стационарными**. На рис. 12.1 точки $x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ –критические, из них стационарные – только x_1, x_3, x_5, x_7.

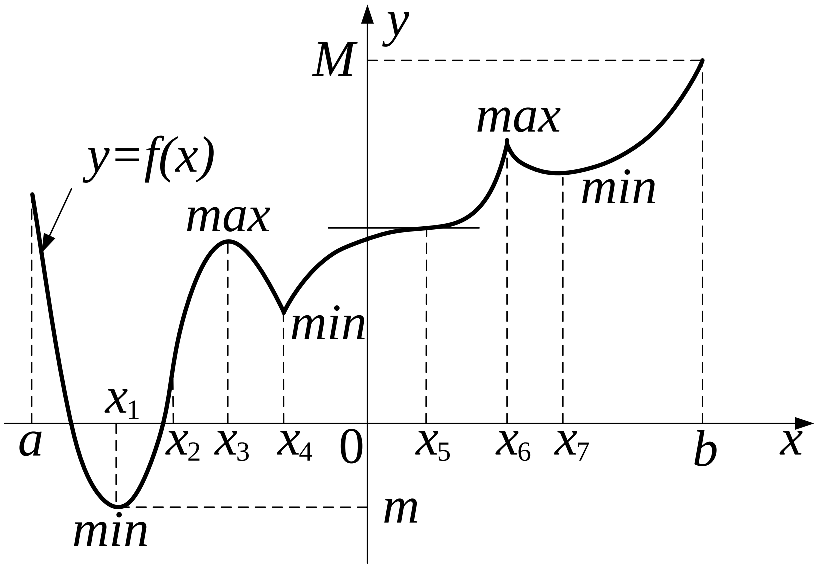

Рис. 12.1

Определение. Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если существует такая окрестность $U(x_0)$, что для $\forall x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

Максимумы (max) и **минимумы** (min) называют одним общим термином **экстремумы**. При этом говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум (максимум, минимум) $f(x_0)$. Значение же $f(x_0)$ называют экстремальным (максимальным, минимальным) значением функции.

Теорема 12.2. *Необходимое условие экстремума*

Если функция $f(x)$, непрерывная в точке x_0 и дифференцируемая в некоторой окрестности $U(x_0)$, имеет экстремум в точке x_0, то или $f'(x_0)=0$, или $f'(x_0)$ не существует.

Теорема 12.3. *Первый достаточный признак экстремума*

Если функция $f(x)$ непрерывна в критической точке x_0, дифференцируема в некоторой ее окрестности $U(x_0)$ и $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ для $\forall x \in U(x_0-0)$, $f'(x)<0$ $(f'(x)>0)$ для $\forall x \in U(x_0+0)$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный максимум (минимум); если $f'(x)$ сохраняет свой знак для $\forall x \in U(x_0)$, то в точке x_0 нет локального экстремума, то есть, если при переходе через критическую точку x_0 из ООФ (слева направо) $f'(x)$ **меняет знак с "+" на "–"**, то точка x_0 - точка локального **максимума**; если– **с "–" на "+"**, то x_0 –точка локального **минимума**; если $f'(x)$ в точке x_0 не меняет свой знак, то в точке x_0 экстремума нет.

Непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ принимает свои наибольшее (глобальный максимум M) и наименьшее (глобальный минимум m) значения на $[a;b]$ либо на концах отрезка, либо в его внутренних точках локальных экстремумов. Поэтому для отыскания наибольшего (M) и наименьшего (m) значений непрерывной функции на отрезке $[a;b]$ достаточно вычислить и сравнить ее значения на концах отрезка и во всех критических точках, лежащих внутри отрезка $[a;b]$, выбрав при этом из них M и m.

Интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции

Определение. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется **выпуклым** (**вогнутым**) на интервале $(a;b)$, если все точки графика $y = f(x)$ расположены ниже (выше) точек любой касательной, проведенной к нему на этом интервале, кроме точек касания (см. рис. 12.2).

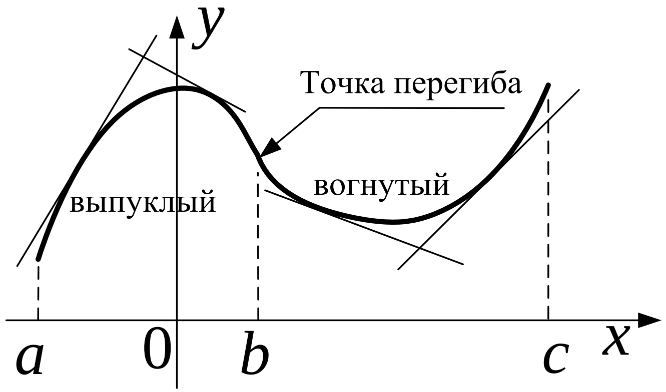

Рис. 12.2

Теорема 12.4. *Достаточные условия выпуклости (вогнутости)*

Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на $(a;b)$ и для $\forall x \in (a;b): f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$, то график функции $y = f(x)$ – выпуклый (вогнутый) на $(a;b)$.

Теорема 12.5. *Второй достаточный признак экстремума*

Если для дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ точка $x_0 \in D(y)$ является критической точкой первой производной $f'(x)$, где $f'(x_0) = 0$ и $\exists f''(x_0) \neq 0$, то $f(x_0)$–экстремальное значение функции; причем, если $f''(x_0) < 0$, то $f(x_0)$–максимум, а если $f''(x_0) > 0$, то $f(x_0)$–минимум.

Определение. Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ на графике непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая выпуклую и вогнутую его части, называется **точкой перегиба** графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 12.2). На рис. 12.1 такими точками являются точки графика с абсциссами x_2 и x_5.

Из теоремы 12.4 следует, что абсциссы **возможных точек перегиба** надо искать среди точек, в которых либо $f''(x) = 0$, либо $f''(x)$ не существует, т.е. среди **критических точек второй производной.**

Теорема 12.6. Пусть $f''(x)$ существует в некоторой окрестности своей критической точки $x_0 \in D(f)$. Тогда, если при переходе через x_0 производная $f''(x)$ меняет свой знак, то точка $M_0(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика непрерывной функции $y = f(x)$. В противном случае в точке M_0 перегиба нет.

Асимптоты графика функции

Определение. Прямая называется **асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x;\, f(x))$ графика до этой прямой стремится к нулю при бесконечном удалении точки M (по графику) от начала координат (см. рис. 12.3).

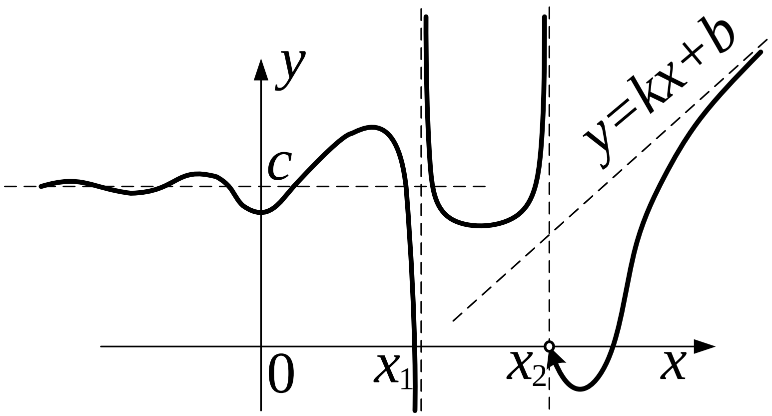

Рис. 12.3

Различают вертикальные и наклонные асимптоты. При этом прямая $x = x_0$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x)$ бесконечен, т.е. вертикальные асимптоты могут быть в точках бесконечных разрывов функции, а также в конечных границах области определения. Поэтому вертикальных асимптот у графика функции может быть сколь угодно много (например, $y = \operatorname{tg} x$).

Наклонные асимптоты графика имеют уравнение $y = kx + b$ и характеризуют "асимптотическое" поведение функции при $x \to \pm\infty$. Поэтому максимальное их количество равно двум (при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$).

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой, если

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right).$$

Полное исследование функции и построение графика

Приведем **алгоритм исследования** функции и построения ее графика.

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать функцию на четность.

3. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрывов и определить их характер.

4. Найти асимптоты графика функции (вертикальные и наклонные).

5. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции.

6. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба.

7. Найти в качестве вспомогательных точки пересечения графика функции с осями координат (причем с осью Ox – по возможности).

8. Используя результаты исследования, построить график функции.

Спасибо за внимание!