ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Понятие производных и дифференциалов высших порядков

Производная n-го порядка

Производная $f'(x)$ называется производной первого порядка (или первой производной) функции $f(x)$, а производная от производной $f'(x)$ называется производной второго порядка (или второй производной) функции $f(x)$ и т.д. **Производная от производной $n-1$–го порядка называется производной $n-$го порядка** (или $n-$й производной) функции $f(x)$. Начиная со второй, производные называются производными высших порядков и обозначаются y'', y''', $y^{(4)}$, $y^{(5)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots$ или $f''(x), f'''(x)$, $f^{(4)}(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$.

Физический смысл второй производной в том, что $S''(t) = (S'(t))' = V'(t) = a(t)$ – мгновенное ускорение при прямолинейном движении по закону $S = S(t)$.

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в каждой точке x некоторого промежутка X. Тогда ее дифференциал $dy = f'(x)dx$, называемый дифференциалом первого порядка, является функцией двух параметров: аргумента x и его дифференциала dx. Однако, считая здесь $dx = \Delta x = const$, имеем выражение dy, зависящее лишь от одной переменной x. Тогда его дифференциал, согласно определению дифференциала имеет вид: $d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2$, обозначается $d^2y = y''(x)dx^2$ и называется дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ в точке x. Аналогично вводится понятие дифференциала третьего, четвертого порядков и т.д.:

$$d^3y = y'''(x)dx^3; \quad d^4y = y^{(4)}\,dx^4; \ldots, d^ny = y^{(n)}\,dx^n.$$

d^ny называется **дифференциалом** $n-$**го порядка** (или $n-$м дифференциалом) функции $y = f(x)$. Из формулы дифференциала следует, что для любого n справедливо равенство, которое также является формальной записью (обозначением) производных: $y^{(n)}(x) = \dfrac{d^ny}{(dx)^n} = \dfrac{d^ny}{dx^n}$,

т.е. $n-$я производная функции $y = f(x)$ в точке x равна отношению $n-$го дифференциала этой функции в точке x к $n-$й степени дифференциала аргумента.

Основные теоремы дифференциального исчисления

Теоремы о среднем

Теорема 11.1. *(теорема Ферма)*. Пусть в интервале $(a;b)$ определена функция $f(x)$, которая в некоторой точке $x_0 \in (a;b)$ имеет наибольшее или наименьшее значение. Тогда или $f'(x_0) = 0$, или $f'(x_0)$ не существует.

Для дифференцируемой на $(a;b)$ функции $f(x)$ **геометрический смысл** теоремы Ферма в том, что, если такая функция имеет в точке $x_0 \in (a;b)$ наибольшее или наименьшее значение, то в точке $(x_0; f(x_0))$ касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси Ox.

Теорема 11.2. *(теорема Ролля)*. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема в $(a;b)$ и имеет равные значения на концах отрезка: $f(a)=f(b)$. Тогда существует хотя бы одно значение $c\in(a;b)$ такое, что $f'(c)=0$.

Теорему Ролля, по понятной причине, называют **теоремой о корнях производной** дифференцируемой функции.

Геометрически она означает, что у графика функции $y=f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы, существует на $(a;b)$ точка $(c;f(c))$, в которой касательная параллельна оси $0x$ (см. рис. 11.1).

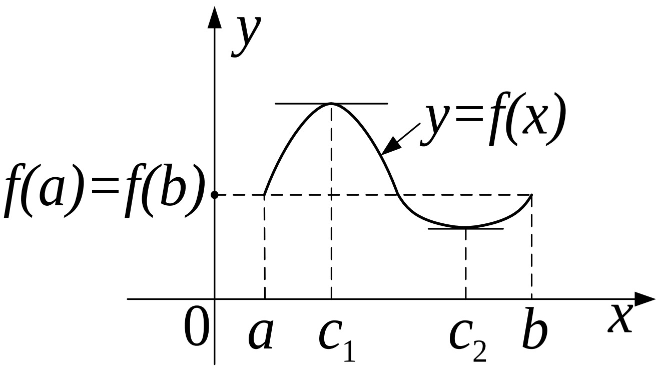

Рис. 11.1.

Теорема 11.3. *(теорема Коши)*. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a;b]$, дифференцируемы в $(a;b)$ и при $\forall x \in (a;b)$ $:\varphi'(x) \neq 0$, то существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Теорема 11.4 *(теорема Лагранжа)*. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема в $(a;b)$, то существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ или $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$.
При этом последнее равенство называется формулой Лагранж**а или формулой конечных приращений.**

В силу того, что величина $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ является угловым коэффициентом секущей (хорды) M_1M_2 графика функции $y = f(x)$ (где $M_1(a;f(a))$, $M_2(b;f(b))$), а $f'(c)-$угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $(c;f(c))$, **геометрический смысл** теоремы Лагранжа заключается в том, что в интервале $(a;b)$ существует, по крайней мере, одна точка c, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна секущей (хорде) M_1M_2 (см. рис. 11.2).

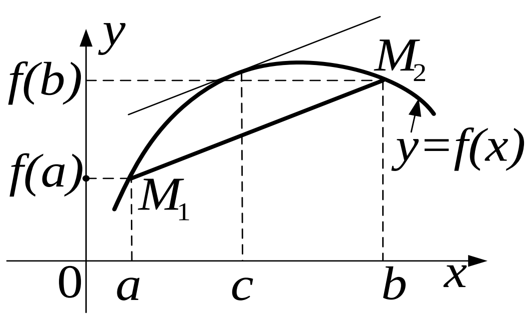

Рис.11.2

Правило Лопиталя

Теорема 11.5 *(теорема Лопиталя)*. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и дифференцируемы в окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, и пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$ или ∞, $\varphi(x) \neq 0$ и $\varphi'(x) \neq 0$ в этой окрестности. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при неопределенности $(0/0)$ или (∞/∞), и при этом имеет место равенство

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Спасибо за внимание!