ЛЕКЦИЯ 9.
9.1. Вычисление пределов

9.1.1. Непосредственное раскрытие неопределенностей вида (∞/∞), $(\infty-\infty)$, $(\infty\cdot 0)$, $(0/0)$.

Правило 1. Неопределенность (∞/∞) раскрывают, максимально сокращая дробь на выражение, стремящееся к бесконечности.

Правило 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\begin{cases}\infty, & \text{если} \quad n>m\\ 0, & \text{если} \quad n<m\\ p_0/q_0, & \text{если} \quad n=m,\end{cases}$

где p_0 и q_0–обобщенные (суммарные) коэффициенты при старшей степени переменой x соответственно в числителе и в знаменателе.

Замечание 1. Неопределенность $(\infty-\infty)$ может быть сведена к дробной неопределенности (∞/∞) или к $(0/0)$ либо приведением к общему знаменателю, либо домножением и делением на сопряженное выражение, либо вынесением за скобку одного из бесконечных слагаемых.

Замечание 2. Неопределенность $(\infty\cdot 0)$ приводится к виду (∞/∞) или $(0/0)$ следующим образом: пусть при $x\to x_0$ $f(x)\to\infty$, $\varphi(x)\to 0$, тогда при $x\to x_0$:

$$f(x)\cdot\varphi(x)=(\infty\cdot 0)=\frac{f(x)}{1/\varphi(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{\varphi(x)}{1/f(x)}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

9.1.2. Специальные пределы

1. ***Первый специальный предел*** $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$.

2. ***Второй специальный предел*** является определением числа e (основания натуральных логарифмов $\ln x=\log_e x$):

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\left(1^{\infty}\right)=e \text{ или } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=(1^{\infty})=e,$$

где $e\approx 2{,}71828\ldots\approx 2{,}72$ (иррациональное число).

3. ***Третий специальный предел*** $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$.

4. ***Четвертый специальный предел*** $\lim\limits_{z\to 0}\frac{a^z-1}{z}=\left(\frac{0}{0}\right)=\ln a$, $(a>0, a\neq 1)$

При $a=e$ получается широко применяемый частный случай четвертого специального предела $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$.

5. ***Пятый специальный предел*** имеет вид $\lim\limits_{z\to 0}\frac{(1+z)^p-1}{z}=\left(\frac{0}{0}\right)=p$

9.1.3. Сравнение бесконечно малых.

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются **БМ** при $x \to x_0$

а) если $k \neq 0$, $k \neq \infty$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ суть **БМ одного порядка малости** при $x \to x_0$;

б) если $k = 0$, то функция $\alpha(x)$ является **БМ более высокого порядка** малости, чем $\beta(x)$,

в) если $k = \infty$, то функция $\beta(x)$, является **БМ более высокого порядка** малости, чем $\alpha(x)$

9.1.3. Сравнение бесконечно больших.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)/\varphi(x)\right)=(\infty/\infty)=k$. Тогда:

а) если $k\neq 0$, $k\neq\infty$, то $f(x)$ и $\varphi(x)$ – **ББ одного порядка роста** при $x\to x_0$;

б) если $k=\infty$, то $f(x)$ – **ББ более высокого порядка роста**, чем $\varphi(x)$ при $x\to x_0$, при этом пишут $|f(x)|>>|\varphi(x)|$ при $x\to x_0$;

в) если $k=0$, то $|\varphi(x)|>>|f(x)|$ при $x\to x_0$.

9.1.3. Использование эквивалентных функций при вычислении пределов

Определение. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)/\varphi(x) \right) = (\infty/\infty) = k.$, если $k = 1$, то эти функции называются **эквивалентными** при $x \to x_0$; при этом пишут $\alpha \sim \beta$ при $x \to x_0$

Теорема 9.1. *теорема об эквивалентных множителях*

Предел функции не изменится, если её множители или делители заменить на эквивалентные.

список (таблица) эквивалентных бесконечно малых при $z \to 0$:

$\sin z \sim z$; $\operatorname{tg} z \sim z$; $1-\cos z \sim z^2/2$; $\arcsin z \sim z$;

$\operatorname{arctg} z \sim z$; $\ln(1+z) \sim z$; $\log_a(1+z) \sim \dfrac{z}{\ln a}$; $a^z - 1 \sim z \ln a$;

$e^z - 1 \sim z$; $(1+z)^p - 1 \sim pz$.