ЛЕКЦИЯ 8.
8.1. Предел функции одной переменной

Предел–фундаментальное понятие, на котором базируются другие основные понятия математического анализа: непрерывность, производная, интеграл.

8.1.1. Понятие предела, его единственность, связь с односторонними пределами и с ограниченностью функции

Определение 1 . Число A называется **пределом функции** $f(x)$ **в точке** x_0 (или при x, стремящемся к x_0), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in U(x_0, \delta) \bigcap X$, т.е. удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta_{(\varepsilon)}$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

При этом обозначают предел функции символом $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Определение 2. Функция $f(x)$ **в точке** x_0 **имеет бесконечный предел,** т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, в таком случае функция $f(x)$ называется **бесконечно большой (ББ) при** $x \to x_0$.

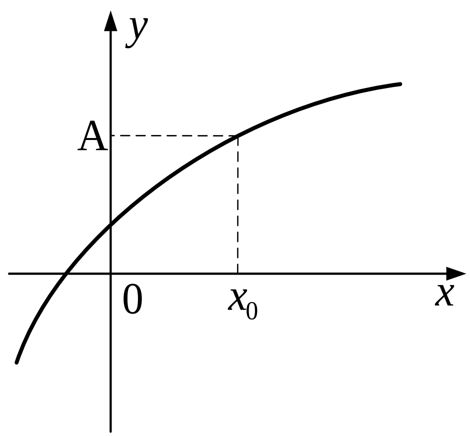

Рис. 8.1

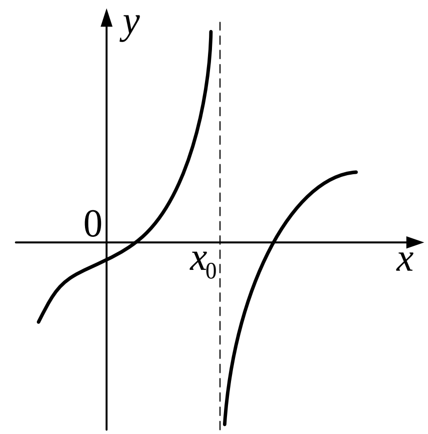

Рис. 8.2

Теорема 8.1. *О единственности конечного предела функции*

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечный предел, то он единственный.

Доказательство. Предположим противное, т.е., что $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq B = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, где $A \neq \infty$, $B \neq \infty$. Тогда по определению 1 предела функции: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta_1) : |f(x) - A| < \varepsilon$ и $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta_2) : |f(x) - B| < \varepsilon$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ есть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ такое, что для всех $x \in X$, $0 < |x - x_0| < \delta$ должны выполняться оба неравенства: $|f(x) - A| < \varepsilon$ и $|f(x) - B| < \varepsilon$, т.е. значение $f(x)$ должно находиться одновременно и в $\varepsilon -$ окрестности точки A и в $\varepsilon -$окрестности точки B, что невозможно уже при радиусе окрестности (ε), меньшем полурасстояния между точками A и B, т.е. при $0 < \varepsilon < \dfrac{|B - A|}{2}$. Это противоречие показывает, что сделанное предположение $A \neq B$ неверно, т.е. $A = B$. Теорема доказана.

Понятие односторонних пределов функции

Определение. Значение **П** называется правосторонним (Λ–левосторонним) пределом функции ($f(x)$ в точке $x_0 \neq \infty$, если для любой окрестности $U(\Pi)$ $\big(U(\Lambda)\big)$ существует правосторонняя окрестность $U(x_0+0)$ (левосторонняя $U(x_0-0)$) такая, что для всех $x \in U(x_0+0) \bigcap X$ $\big(x \in U(x_0-0) \bigcap X\big)$ выполняется условие $f(x) \in U(\Pi)$ $\big(f(x) \in U(\Lambda)\big)$. При этом пишут:

$$\Pi = f(x_0+0) = \lim_{x \to x_0+0} f(x) \text{ и } \Lambda = f(x_0-0) = \lim_{x \to x_0-0} f(x).$$

Теорема 8.2. Функция $f(x)$, определенная на множестве X, **имеет** в точке x_0, для которой $U(x_0)\bigcap X \neq \varnothing$, предел тогда и только тогда, когда в этой точке **существуют** как **правосторонний**, так и **левосторонний** пределы, и они равны, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A.$$

Теорема 8.3. Если функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке x_0, то она ограничена в окрестности точки x_0.

Доказательство. Так как $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq \infty$, то по определению предела: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists U(x_0))\left(\forall x \in U(x_0) \bigcap X\right): \left|f(x) - A\right| < \varepsilon$.

Но $\left|f(x)\right| - \left|A\right| \leq \left|f(x) - A\right| \Rightarrow \left|f(x)\right| - \left|A\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|f(x)\right| < \left|A\right| + \varepsilon = M$,

т.е. для $\forall x \in U(x_0) \bigcap X$ выполняется условие $\left|f(x)\right| < M \Rightarrow f(x)$ – ограничена в окрестности точки x_0.

Теорема 8.4. Если при $x \to x_0$ функция $f(x)$ имеет предел, отличный от нуля, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ ограничена в окрестности точки x_0.

8.2.2. Теоремы о бесконечно малых

Теорема 8.5. *Основная теорема о бесконечно малых*

Для существования конечного предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq \infty$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - A$ была бесконечно малой при $x \to x_0$.

Теорема 8.6. ***О связи бесконечно малых и бесконечно больших***

Если при $x \to x_0$ функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая при $x \to x_0$. Верно и обратное утверждение.

Теорема 8.7. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых при $x \to x_0$, а также произведение бесконечно малой в точке x_0 на ограниченную функцию при $x \to x_0$ являются бесконечно малыми функциями при $x \to x_0$.

8.2.3. Теоремы о пределах

Теорема 8.8. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 пределы: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при $B\neq 0$) имеют в точке x_0 пределы, равные соответственно $A\pm B$, $A\cdot B$ и $\dfrac{A}{B}$.

Теорема 8.9. Если в окрестности точки x_0 определены функции $\varphi(x)$, $f(x)$, $g(x)$, связанные неравенством $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$, и существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Теорема 8.10. Если неотрицательная в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ge 0$.

Теорема 8.11. Если в окрестности точки x_0 функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ связаны неравенством $f(x)\ge\varphi(x)$ и существуют пределы: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B$, то $A\ge B$.

8.3. Непрерывность функции одной переменной

8.3.1. Понятие непрерывности

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если она определена в этой точке и в некоторой ее окрестности и значение функции в точке x_0 совпадает со значением предела в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

8.3.2. Свойства непрерывных функций

1. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то и функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывны на $[a; b]$ (последняя – всюду, где $g(x) \neq 0$).

3. Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(u))$ – непрерывна в точке $x = x_0$.

4. Все элементарные функции непрерывны во внутренних точках своей области определения.

5. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $U(x_0)$ такая, что для всех $x \in U(x_0)$ функция $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f(x_0)$.

6. Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет на концах отрезка значения разных знаков $\left(f(a)\cdot f(b)<0\right)$, то существует по крайней мере одна точка $c\in(a;b)$, в которой $f(c)=0$.

7. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a)=A\neq f(b)=B$, то для любого числа C, заключенного между A и B, найдется хотя бы одна точка $c\in(a;b)$ такая, что $f(c)=C$.

8. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она ограниченная на $[a;b]$.

9. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;b]$, достигает на $[a;b]$ своих наибольшего M и наименьшего m значений хотя бы один раз и принимает на $[a;b]$ любое промежуточное значение, лежащее между m и M.

10. Если функция $f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна на некотором промежутке X и промежуток Y – множество ее значений, то на промежутке Y обратная функция $f^{-1}(y)$ однозначна, монотонна и непрерывна.

8.3.3.Признаки непрерывности.

1. существует $f(x_0) \neq \infty$;
2. существует $f(x)$ при $x \in \mathrm{U}(x_0)$;
3. существует $\Lambda = f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \infty$;
4. существует $\mathit{\Pi} = f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \infty$;
5. $\Lambda = \mathit{\Pi} = f(x_0)$.

Классификация точек разрыва

1. Разрыв в точке x_0 называют **устранимым разрывом 1-го рода**, если $\Lambda = \Pi \neq f(x_0)$, причем $\Lambda, \Pi \neq \infty$ (см. рис. 8.3).

2. В точке x_0 **разрыв** будет **неустранимый 1-го рода**, если $\Lambda \neq \Pi$, но $\Lambda, \Pi \neq \infty$ (см. рис. 8.4).

3. Если хотя бы один из односторонних пределов (Λ, Π) равен бесконечности или вообще не существует, то **разрыв** в точке x_0 называется разрывом **2-го рода** (см. рис. 8.5).

В случае разрыва разность $\sigma = \Pi - \Lambda$ называется скачком функции $f(x)$ в точке x_0.

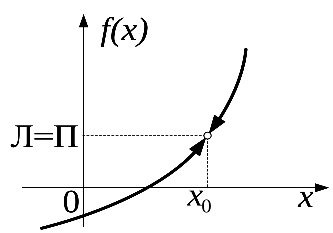

Рис. 8.3

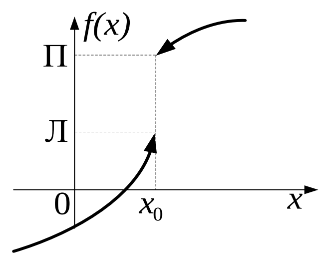

Рис. 8.4

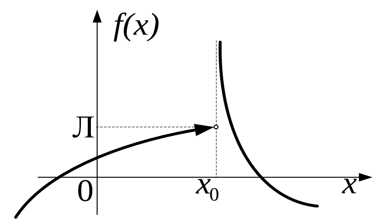

Рис. 8.5