Предел последовательности комплексных чисел. Предел и непрерывность функции комплексного переменного.

Определение 18.1. Пусть дана последовательность комплексных чисел $\{z_n\} = z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$. Комплексное число *а* называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если для любого положительного числа ε можно указать такой номер $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого все члены z_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|z_n - a| < \varepsilon,\ n \geq N$.

Определение 18.2. Последовательность $\{z_n\}$, имеющая предел а, называется сходящейся к числу а, что записывается в виде $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Каждой последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где

$$z_n = x_n + iy_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

Теорема 18.1. Последовательность $\{z_n = x_n + iy_n\}$ сходится к числу $a = \alpha + i\beta$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta.$

Определение 18.3. Последовательность $\{z_n\}$ называется ограниченной, если существует положительное число М такое, что для всех элементов z_n этой последовательности выполняется неравенство $|z_n| \leq M.$

Теорема 18.2. Всякая сходящаяся последовательность $\{z_n\}$ ограничена.

Свойства сходящихся последовательностей.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = b$, то

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \pm \tau_n) = a \pm b;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \cdot \tau_n) = a \cdot b;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{\tau_n} = \dfrac{a}{b}, (\tau_n \neq 0, b \neq 0).$

Определение 18.4. Окрестностью точки z_0 плоскости комплексной переменной z называется всякая область, содержащая эту точку. δ-окрестностью точки z_0 называется множество всех точек z, лежащих внутри круга радиуса δ с центром в точке z_0, т. е. множество всех точек z, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<\delta$.

Определение 18.5. Пусть функция ω = f (z) определена в некоторой окрестности Ω точки z_0, кроме, быть может, самой точки z_0. Число A называется пределом функции f (z) в точке z_0, если для любого числа ε > 0 можно указать такое число δ > 0, что для всех точек $z \in \Omega$, удовлетворяющих условию $|z-z_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(z)-A|<\varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$. Здесь предполагается, что z_0 и A конечные точки комплексной плоскости.

Существование предела $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, где $f(z)=u(x,y)+ \quad +iv(x,y), \quad z_0=x_0+iy_0$, равносильно существованию двух пределов $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)$, причём

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)+i\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y).$$

Свойства пределов функций комплексного переменного.

Пусть существуют пределы $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A, \lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, тогда

$$\lim_{z\to z_0}\left(f(z)\pm g(z)\right)=A\pm B,$$

$$\lim_{z\to z_0}\left(f(z)\cdot g(z)\right)=A\cdot B,$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}, \quad B\neq 0.$$

Определение 18.6.Функция f (z) , заданная в области D, называется непрерывной в точке z_0, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

Для непрерывности функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ комплексной переменной в точке z_0 = x + iy_0 необходимо и достаточно, чтобы её действительная и мнимая части, т.е. функции u(x,y) и v(x,y), были непрерывны в точке z_0 по совокупности переменных x, y.

Определение 18.7. Функция f(z) комплексного переменного называется непрерывной в области D , если она непрерывна в каждой точке этой области. Сумма, разность, произведение двух функций комплексного переменного f(z) и g(z) , непрерывных в области D , также являются функциями непрерывными в этой области, а функция $\frac{f(z)}{g(z)}$ непрерывна в тех точках области D , где $g(z) \neq 0$.

Дифференцирование функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.

Пусть функция ω = f(z) определена в некоторой области D комплексного переменного z. Пусть точки z и z + Δ z принадлежат этой области. Обозначим Δω = f(z + Δz) –f(z), Δz = Δx+ iΔy.

Определение 18.8. Функция ω = f(z) называется дифференцируемой в точке $z \in D$, если отношение Δω/Δz имеет конечный предел при $\Delta z \to 0$ произвольным образом. Этот предел называется производной функции f(z) в точке z и обозначается $f'(z)$ (или ω', или $\frac{d\omega}{dz}$). Так что по определению $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z}$.

Определение 18.9. Если z = x + iy, f(z) = u(x, y) + i v(x, y), то в каждой точке дифференцируемости функции f(z) выполняются соотношения $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, называемыми условиями Коши-Римана. Верно и обратное. Если в некоторой точке (x, y) функции u(x, y) и v(x, y) дифференцируемы как функции действительных переменных x и y и удовлетворяют условиям $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, то функция f(z) = u + iv дифференцируема в точке z = x + iy как функция комплексного переменного z.

Определение 18.10. Функция ω = f(z) называется аналитической в данной точке $z \in D$, если она дифференцируема как в самой точке, так и в некоторой её окрестности. Функция f(z) называется аналитической в области

D, если она дифференцируема в каждой точке этой области. Для любой аналитической функции f(z) имеем

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Определение 18.11. Функция φ (x, y) называется гармонической в области D, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению

Лапласа $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$.

Если функция f(z) = u + iv аналитична в некоторой области, то её действительная часть u(x,y) и мнимая часть v(x, y) являются в этой области гармоническими функциями. Однако, если u_1(x, y) и v_1(x, y) любые две гармонические функции, то функция $f_1(z) = u_1 + iv_1$ не обязательно будет аналитической функцией: для аналитичности $f_1(z)$ нужно, чтобы функции u_1 и v_1 удовлетворяли условиям Коши-Римана.

Определение 18.12. Две гармонические функции, удовлетворяющие условиям Коши-Римана, называются сопряжённой парой гармонических функций (порядок функций в паре существенен).

Геометрический смысл модуля и аргумента производной.

Пусть функция f(z) аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$. Тогда $|f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении ω = f(z) плоскости z на плоскость ω; точнее, при $|f'(z_0)|>1$ имеет место растяжение, а при $|f'(z_0)|<1$ – сжатие.

Аргумент производной $f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой на плоскости z, проходящей через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке $\omega_0 = f(z_0)$ к образу этой кривой на плоскости ω при отображении ω = f(z). При этом, если $\varphi=\arg f'(z_0)>0$, то поворот происходит против часовой стрелки, а при φ < 0 – по часовой.