Функции комплексного переменного.

Понятие функции комплексного переменного

Определение 17.1. Говорят, что в области D комплексной плоскости z определена функция комплексного переменного $\omega = f(z)$, если каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) значений ω.

Определение 17.2. Множество комплексных чисел ω, соответствующих всем $z \in D$, называется множеством значений функции $f(z)$.

Поскольку каждое комплексное число $z = x + iy$ характеризуется парой действительных чисел x и y, то задание комплексной функции $\omega = u + iv$ комплексной переменой $z = x + iy$ эквивалентно заданию двух действительных функций двух действительных переменных, что можно записать в виде

$$\omega(z) = u(x,y) + i\, v(x,y).$$

Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ определены в области D. Функция $u(x,y)$ называется действительной, а функция $v(x,y)$ – мнимой частью функции $\omega = f(z)$.

Основные элементарные функции комплексного переменного.

1. Дробно-рациональная функция

$$\omega = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m};$$

в частности, рациональной функцией является многочлен

$$\omega = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_0 .$$

2. Показательная функция e^z определяется как сумма абсолютно сходящегося во всей комплексной плоскости степенного ряда

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

Показательная функция обладает следующими свойствами:

1) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$ при любых $z_1 z_2$.

2) $e^{z+2\pi ki}=e^z$, ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$), т. е. функция e^z является периодической с периодом $T = 2\pi i$.

3. Тригонометрические функции sin z и cos z определяются степенными рядами

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,$$
$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots,$$
где $n = 1,2, \ldots$,

абсолютно сходящимися при любом значении z. Функции sin z и cos z – периодические с действительным периодом $T = 2\pi$, имеют только действительные нули при $z = \pi k$ и $z=\frac{\pi}{2}+\pi k$ соответственно, где $k=0,\pm1,\pm2, \ldots$

Функции tg z , ctg z определяются равенствами $\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}$, они имеют действительный период $T = \pi$.

Для тригонометрических функций остаются в силе все формулы тригонометрии. Для функций e^z, sin z, cos z имеют место формулы Эйлера:

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,$$
$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z,$$

откуда

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2i}.$$

4. Гиперболические функции.

Гиперболические функции sh z, ch z, th z, cth z определяются равенствами $\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$, $\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$, $T = 2\pi i$; $\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$, $\operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$, $T = \pi i$. Тригонометрические и гиперболические функции связаны между собой соотношениями:

sin z = – i sh iz, cos z = ch iz, tg z = – i th iz, ctg z = i cth iz.

sh z = – i sin iz, ch z = cos iz, th z = – i tg iz, cth z = i ctg iz.

Очевидно и то, что $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$, т. к. $z = x + iy$.

5. Логарифмическая функция Ln z, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причём

Ln z = ln$|z|$ + i Arg z = ln$|z|$ + i arg z + 2πki, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,

т.е. $e^{Lnz} = z$, arg z – главное значение z. Эта функция является многозначной. Главным значением Ln z называется то значение, которое получается при k = 0; оно обозначается ln z: ln z = ln$|z|$ + i arg z. Понятно, что Ln z = lnz + 2πki, k = 0, $\pm 1, \pm 2, \cdots$. Справедливы следующие соотношения:

$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln} z_1 + \mathrm{Ln} z_2, \quad \mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln} z_1 - \mathrm{Ln} z_2.$$

6. Общая показательная функция $\omega = a^z$, где a – любое комплексное число $(a \neq 0)$ определяется равенством $a^z = e^{z\mathrm{Ln}a}$, т.к. $a^z = e^{\mathrm{Ln}a^z} = e^{z\mathrm{Ln}a}$. Главное значение этой многозначной функции $a^z = e^{z\ln a}$.

7. Общая степенная функция $\omega = z^a$, где $a = \alpha + i\beta$ – любое комплексное число, определяется равенством $z^a = e^{a\mathrm{Ln}z}$. Это многозначная функция, и её главное значение равно $z^a = e^{a\mathrm{Ln}z}$.

8. Обратные тригонометрические функции Arcsin z, Arccos z, Arctg z, Arcctg z определяются как функции, обратные функциям sin z, cos z, tg z, ctg z соответственно. Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмическую функцию.

$$\mathrm{Arc}\sin z = -i\mathrm{Ln}\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right), \quad \mathrm{Arc}\cos z = -i\mathrm{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\mathrm{Arctg} z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{i-z}{i+z}\right), \quad z \neq \pm i.$$

$$\mathrm{Arcctg} z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{z+i}{z-i}\right), \quad z \neq \pm i.$$

Главные значения этих функций получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмических функций.

9. Обратные гиперболические функции определяются следующим образом: $\mathrm{Arshz} = \mathrm{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2+1}\right)$, $\mathrm{Archz} = \mathrm{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right)$,

$$\mathrm{Arth} z = \frac{1}{2} \mathrm{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right), z \neq \pm 1 .$$