ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Комплексные числа и действия над ними

Определение 16.1. Комплексным числом z называется выражение $z = a + ib$, где a, b – любые действительные числа, i – мнимая единица. Первое число a пары (a, b) называется действительной частью комплексного числа z и обозначается символом $a = \text{Re } z$; второе число b называется мнимой частью комплексного числа z и обозначается символом $b = \text{Im } z$.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, т.е. $z_1 = z_2$ лишь при $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Определение 16.2. Нулём называется комплексное число, у которого действительная часть $a = 0$ и мнимая часть $b = 0$, т. е. $z = 0 + i0$, и обычно пишут просто $z = 0$.

Определение 16.3. Комплексное число $\bar{z} = a - ib$ называется комплексно сопряжённым числу $z = a + ib$.

Определение 16.4. Запись вида $z = a + ib$ называется алгебраической формой комплексного числа.

Поскольку комплексное число определяется как пара действительных чисел, то естественной геометрической интерпретацией является изображение комплексного числа $z = a + ib$ точкой плоскости (x, y) с декартовыми координатами $x = a$, $y = b$. Такую плоскость в дальнейшем будем называть комплексной плоскостью, ось абсцисс – действительной, а ось ординат – мнимой осью комплексной плоскости. При этом устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех комплексных чисел и множеством точек комплексной плоскости, а также между множеством всех комплексных чисел и множеством всех свободных векторов, проекции x и y которых на оси абсцисс и ординат соответственно равны a и b. Таким образом, комплексное число $z = a + ib$ изображается в плоскости (x, y) точкой M(a, b) либо вектором, начало которого находится в точке O(0,0) а конец в точке M(a, b). Для определения положения точки на плоскости можно пользоваться полярными координатами (ρ, φ), где ρ – расстояние точки от начала координат, а φ – угол, который составляет радиус–вектор данной точки с положительным направлением оси абсцисс. Положительным направлением изменения угла φ считается направление против часовой стрелки $(-\pi < \varphi \le \pi)$.

Определение 16.5. Длина ρ вектора $\overrightarrow{OM}$ называется модулем комплексного числа и обозначается $\rho = |z|$, а угол φ, образованный этим вектором с положительным направлением оси OX, называется аргументом комплексного числа z и обозначается φ = Arg z.

Легко выразить модуль и аргумент комплексного числа через его действительную и мнимую части: $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$ (при выборе из последнего соотношения значения φ следует учитывать знаки a и b). Отметим, что аргумент комплексного числа определён не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π:

Arg z = arg z + 2πk, k = 0, ±1, ±2,…,

где arg z – есть главное значение аргумента, определяемое условиями –π < arg z ≤ π, причём

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & \text{если} \quad a > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & \text{если} \quad a < 0, \quad b \ge 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & \text{если} \quad a < 0, \quad b < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если} \quad a = 0, \quad b > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если} \quad a = 0, \quad b < 0. \end{cases}$$

Имеют место следующие соотношения

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z) = \frac{b}{a}, \ \sin(\operatorname{Arg} z) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \cos(\operatorname{Arg} z) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Аргумент комплексного числа $z = 0$ вообще не определён, а его модуль равен нулю. Два отличных от нуля комплексных числа равны между собой в том и только в том случае, если равны их модули, а значения аргументов или равны, или отличаются на число кратное 2π. Комплексно сопряжённые числа имеют один и тот же модуль, а значения их аргументов при соответствующем выборе областей их изменения различаются знаком.

Свойства модуля комплексных чисел:

1) $|\bar{z}| = |z|$;
2) $|z| \cdot |\bar{z}| = |z|^2$;
3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
4) $|z^n| = |z|^n$;
5) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, если $z_2 \neq 0$;
6) $|\operatorname{Re} z| \le |z|$, $|\operatorname{Im} z| \le |z|$;
7) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$;
8) $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$.

Воспользовавшись связью декартовых и полярных координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$, получим так называемую тригонометрическую форму записи комплексного числа:

$z = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\rho = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Используя известную формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, получаем так называемую показательную форму записи комплексного числа: $z = \rho e^{i\varphi}$.

Действия над комплексными числами.

Определение 16.6. Пусть даны два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$. Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z = a + ib$, где $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$. Операция вычитания комплексных чисел определяется как операция, обратная сложению.

Определение 16.7. Произведением комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется комплексное число $z = a + ib$ такое, что $a = a_1a_2 – b_1b_2$, $b = a_1b_2 + a_2b_1$.

Для выполнения операции умножения удобно пользоваться тригонометрической формой комплексных чисел. Пусть

$$z_1 = \rho_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right),\ z_2 = \rho_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right).$$

Согласно правилам умножения получаем

$$\begin{aligned}
z &= \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = z_1\cdot z_2 = \rho_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\cdot\rho_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) = \\
&= \rho_1\rho_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) + i\rho_1\rho_2\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right) = \\
&= \rho_1\rho_2\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right] = \rho_1\cdot\rho_2\cdot e^{i\left(\varphi_1+\varphi_2\right)}.
\end{aligned}$$

Отсюда $\rho = \rho_1\cdot\rho_2$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, т. е. модуль произведения равен произведению модулей, а аргумент – сумме аргументов сомножителей.

Определение 16.8. Комплексное число $z = a + ib$ называется частным от деления комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2 \neq 0$, если $z_1 = z_2\cdot z$. Чтобы выполнить деление комплексных чисел z_1 и z_2 , умножим и разделим частное на комплексное число $\overline{z}_2 = a_2 - ib_2$, сопряжённое числу z_2:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2} = \frac{\left(a_1+ib_1\right)\cdot\left(a_2-ib_2\right)}{\left(a_2+ib_2\right)\cdot\left(a_2-ib_2\right)} = \frac{\left(a_1a_2+b_1b_2\right)+i\left(-a_1b_2+a_2b_1\right)}{a_2^2+b_2^2} = \\
&= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + i\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.
\end{aligned}$$

В случае деления комплексных чисел в тригонометрической форме при $\rho_2 \neq 0$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
z &= \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)}{\rho_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)} = \\
&= \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right),
\end{aligned}$$

или в показательной форме $z = \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i\left(\varphi_1-\varphi_2\right)}$.

Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня из комплексного числа.

Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа удобны при рассмотрении алгебраических операций возведения комплексного числа в целую положительную степень и извлечения корня из комплексного числа. Возведение комплексного числа

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

в натуральную степень n производится по формуле

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

т. е. $\left|z^n\right| = |z|^n$, $\operatorname{Arg} z^n = n \cdot \operatorname{Arg} z + 2\pi k,\ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Отсюда получается формула Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Определение 16.9. Комплексное число $z_1 = \sqrt[n]{z}$ называется корнем n–й степени из комплексного числа z, если $z = z_1^n$. Из этого определения следует, что $\rho_1 = \sqrt[n]{\rho}$ и $\varphi_1 = \dfrac{\varphi}{n}$. Как было отмечено, аргумент комплексного числа определён не однозначно, а с точностью до слагаемого кратного 2π. Поэтому корень n–й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находят по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

$$\text{где}\ \ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,\ \ \varphi = \arg z,\ \ \rho = |z|.$$

Точки на комплексной плоскости, соответствующие различным значениям $\sqrt[n]{z}$, расположены в вершинах правильного n–угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке z = 0.

Корень n–й степени из действительного числа *a* также имеет n различных значений; среди этих значений действительных будет два, одно или ни одного в зависимости от чётности или нечётности n и знака числа a.