Равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил

Чтобы произвольная пространственная система сил находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций на три взаимно перпендикулярные оси и сумма моментов всех сил системы относительно тех же осей равнялась нулю:

$$\sum F_{ix}=0;\ \sum F_{iy}=0;\ \sum F_{iz}=0;$$

$$\sum m_x\left(\vec{F}_i\right)=0;\ \sum m_y\left(\vec{F}_i\right)=0;\ \sum m_z\left(\vec{F}_i\right)=0.$$

При вычислении момента силы $\vec{F}$ относительно оси часто удобно разложить ее на составляющие $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$, параллельные координатным осям, тогда по теореме Вариньона

$$m_x\left(\vec{F}\right)=m_x\left(\vec{F}_x\right)+m_x\left(\vec{F}_y\right)+m_x\left(\vec{F}_z\right).$$

План решения задач

1. Выделяем механическую систему (тело), равновесие которой следует рассмотреть.

2. Изображаем активные силы, действующие на рассматриваемую механическую систему.

3. Изображаем оси координат.

4. Освобождаем механическую систему от связей, заменяя их действие реакциями.

5. Составляем уравнения равновесия, из которых определяем искомые величины.

Задача С5. Горизонтальная прямоугольная плита весом P (рис. 1) закреплена сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим подшипником в точке B и невесомым стрежнем DD'. На плиту в плоскости, параллельной плоскости xz, действует сила $\vec{F}$, а в плоскости, параллельной yz, – пара сил с моментом M.

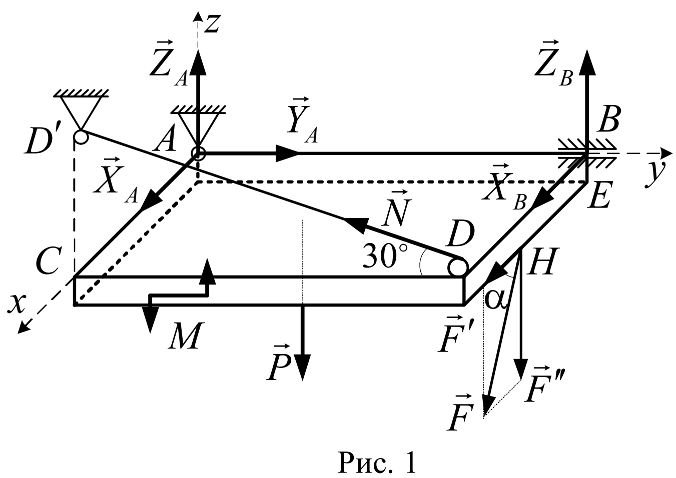

Рис. 1

Дано: P=3 *кН*, F=8 *кН*, M=4 *кН·м*, α=60°, AC=0,8 *м*, AB=1,2 *м*, BE=0,4 *м*, EH=0,4 *м*.

Определить: реакции опор A, B, и стержня DD'.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы $\vec{P}$, $\vec{F}$ и пара с моментом M, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, цилиндрического подшипника – на две составляющие $\vec{X}_B, \vec{Z}_B$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию $\vec{N}$ стержня направляем вдоль стержня от D к D', предполагая, что он растянут.

2. Для определения неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\sum F_{ix} = 0: \; X_A + X_B + F\cos 60° = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0: \; Y_A - N\cos 30° = 0;$$

$$\sum F_{iz} = 0: \; Z_A + Z_B - P + N\sin 30° - F\sin 60° = 0;$$

$$\sum m_x\left(\vec{F}_i\right) = 0: \; M - P \cdot AB/2 + Z_B \cdot AB - F\sin 60° \cdot AB + N\sin 30° \cdot AB = 0;$$

$$\sum m_y\left(\vec{F}_i\right) = 0: \; P \cdot AC/2 + F\sin 60° \cdot EH - N\sin 30° \cdot AC - F\cos 60° \cdot BE = 0;$$

$$\sum m_z\left(\vec{F}_i\right) = 0: \; -X_B \cdot AB - N\cos 30° \cdot AC - F\cos 60° \cdot AB = 0.$$

Для определения моментов силы $\vec{F}$ относительной осей разлагаем ее на составляющие $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, параллельные осям x и z $\left(F' = F\cos\alpha, F'' = F\sin\alpha\right)$, и применяем теорему Вариньона. Аналогично можно поступить при определении моментов реакции $\vec{N}$.

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех задан– ных величин и решив эти уравнения, найдем искомые реакции: $X_A = 3{,}42$ *кН*; Y_A=5,13 *кН*; Z_A=4,83 *кН*; X_B= –7,42 *кН*; Z_B=2,13 *кН*; N=5,93 *кН*. Знак «–» указывает на то, что реакция $\vec{X}_B$ направлена противоположно показанной на рис. 1.

Сделаем проверку правильности расчетов. Для этого составим условие $\sum m_{y_i}\left(\vec{F}_i\right) = 0$:

$$\left(X_A + X_B\right) \cdot BE + \left(Z_A + Z_B\right) \cdot EH - P \cdot \left(EH - AC/2\right) - N\sin 30°\left(AC - EH\right) = 0. \quad (2.27)$$

Подставляя в уравнение (2.27) найденные значения реакций связей, получаем тождество.