

- 4. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ
- 4.1 Оптимизационный метод синтеза
- 4.2 Метод интерполяционного приближения функций
- 4.3 Способ канонических уравнений в интерполяционном синтезе механизмов
- 4.4 Обобщенный синтез прямолинейно-огibaющих механизмов

4 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

При *кинематическом анализе* на работоспособность исследуется **кинематическая схема** механизма, которая составлена с учетом размеров и взаимного расположения звеньев и осей кинематических пар. В соответствии с основными положениями теории механических аномалий (см. 1.2) кинематические характеристики представляют собой разности между числом кинематических подвижностей и числом кинематических связей, причем одна характеристика показывает баланс продольных подвижностей и связей (степень аномальности кинематики), а другая – баланс поперечно-угловых подвижностей и связей (степень иррациональности кинематики).

Кинематические связи накладываются размерами звеньев (линейными или угловыми), то есть кинематическими параметрами, а *подвижность* обеспечивается кинематическими условиями, выраженными в виде функций или в виде размерных условий, определяющих взаимное положение звеньев.

4.1 Кинематические характеристики

Степень аномальности кинематики K есть разность между количеством размерных условий Y , которые можно наложить на группу в данном положении, и количеством размеров Z , необходимых для построения группы в данном положении:

$$K = Y - Z. \quad (4.1)$$

Поскольку схема механизма состоит из пересекающихся осей звеньев и осей кинематических пар, определение числа размерных условий Y в общем случае связано с формализацией параметров, определяющих взаимное расположение этих осей. Степень аномальности кинематики связана с взаимным расположением пересекающихся осей звеньев. Положение осей в пространстве определяется расстоянием и углом между ними, поэтому при пересекающихся по определению осях на схему механизма (плоскую и пространственную) наложено столько общих условий равенства нулю расстояний между осями, сколько она содержит точек пересечения, то есть кинематических пар (на монадном уровне p_m , так как в разветвленных структурах содержатся кратные пары).

Степень аномальности кинематики не зависит от степени аномальности структуры, но группы нормальной структуры обладают свойством *кинематической определенности*, то есть для них возможно решение *первой задачи кинематики – задачи о положениях*, если известны размеры звеньев. Например, для диады (см. рисунок 4.1, а) в произвольном положении можно записать три условия равенства нулю расстояний между пересекающимися осями звеньев, обозначив расстояние между осями a и b как ab и так далее:

$$ab = 0; \quad bc = 0; \quad ca = 0.$$

В произвольном положении группы на нее наложено, таким образом, три условия, а для ее построения необходимы три размера a , b , c . Степень аномальности кинематики, таким образом,

$$K = Y - Z = 3 - 3 = 0,$$

то есть кинематика нормальна, число кинематических связей равно числу кинематических подвижностей.

В положении, показанном на рисунке 4.1, б, звенья располагаются на одной линии, то есть расстояние между осями звеньев равно нулю, поэтому одно условие обобщает все три предыдущие (точек пересечения между осями нет), в том числе еще три условия равенства нулю углов между осями звеньев:

$$a + b = c.$$

Как показано выше, для построения группы в данном положении необходимо всего лишь два размера, поэтому степень аномальности кинематики:

$$K = Y - Z = 1 - 2 = -1.$$

Такое положение соответствует индифферентности кинематики с возможностью создания натяжения вдоль линии цепи.

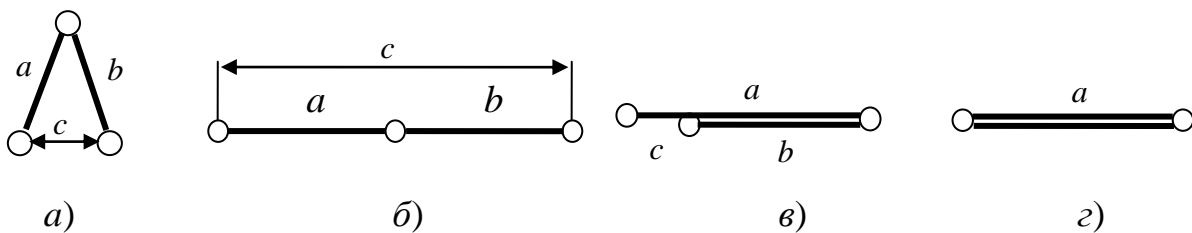


Рисунок 4.1 - Кинематические аномалии двухзвенной группы

Таким же свойством обладает и диада в положении, показанном на рисунок 4.1, в, только размерное условие формулируется иначе:

$$c + b = a.$$

При $c = 0$ и $a - b = 0$ (два условия) (рисунок 4.1, г) оба звена имеют одну неподвижную ось вращения, но для решения задачи о положениях недостает углового размера:

$$K = Y - Z = 2 - 1 = 1,$$

что соответствует адаптивности кинематики, при которой группа занимает произвольное (неопределенное) положение, при этом ее движение (вращение) не вызывает продольных усилий в цепи, как в случае индифферентной кинематики.

Рассмотрим пример определения кинематических характеристик шарнирного четырехзвенника. Вначале определим степень аномальности его кинематики в произвольном положении. Оси звеньев имеют четыре точки пересечения, совпадающих с шарнирами, поэтому как для пространственного, так и для плоского шарнирного четырехзвенника можно составить четыре условия равенства нулю расстояний между осями звеньев. Пятым условием для **плоского** шарнирного четырехзвенника будет зависимость, связывающая

положение всех звеньев с положением начального звена и с обобщенной координатой, называемая **функцией положения**. Для построения шарнирного четырехзвенника необходимы также пять размеров: четыре линейных и один угловой (обобщенная координата). Таким образом, плоский шарнирный четырехзвенник в произвольном положении обладает нормальной кинематикой.



Рисунок 4.2 - К определению кинематических аномалий шарнирного четырехзвенника

В случаях, когда механизм занимает крайние положения (рисунок 4.2), в каждом из которых два звена попадают на одну линию, то есть имеют одну ось, контур кинематической цепи принимает треугольную конфигурацию, а общих условий связи становится три по числу точек пересечения трех осей. Размеров для построения данного контура необходимо и достаточно четырех – например, линейные размеры звеньев r , a , b , c . Обобщенная координата в данном случае не используется в построении, а функция положения принимает экстремальные значения. Степень аномальности кинематики в данном случае показывает индифферентность кинематики, которая проявляется в невозможности передачи движения: на рисунок 4.2, a – от входного звена к выходному, а на рисунок 4.2, $б$ – от выходного к входному:

$$K = Y - Z = 3 - 4 = -1.$$

Поскольку одна кинематическая схема может содержать как положительные, так и отрицательные значения степени аномальности кинематики, имеет смысл погруппное исследование кинематических аномалий с целью уточнения свойств, имеющее тот же смысл, что и поконтурное исследование структуры.

Степень иррациональности кинематики k , по аналогии со степенью аномальности кинематики K , есть разность между числом размерных условий y на взаимное расположение **осей кинематических пар** и числом размеров z , необходимым и достаточным для построения кинематической схемы механизма в данном положении:

$$k = y - z. \quad (4.2)$$

Взаимное расположение осей концевых шарниров в пространстве определяется также расстоянием между осями и углом между ними. Для **плоских механизмов**, у которых все звенья движутся в параллельных плоскостях, расстояние между осями концевых шарниров равно длине звена, а угол между ними равен нулю, поскольку оси параллельны. Такие условия позволяют компенсировать *структурные избыточные связи* в замкнутых

контурах, поэтому работоспособность плоских механизмов определяется степенью аномальности структуры и кинематики. При произвольном расположении осей кинематических пар размеры звеньев не совпадают с расстояниями между осями шарниров, поэтому размерные условия могут содержать равенства линейных размеров или угловых. Рассмотрим различные случаи кинематических иррациональностей на примере той же диады, которая в плоском варианте неподвижна (несмотря на нормальную кинематику), так как на взаимное расположение осей шарниров наложено пять размерных условий (см. рисунок 4.1, а):

$$a = a_0; \quad b = b_0; \quad c = c_0; \quad \angle AB = 0; \quad \angle AC = 0.$$

Здесь индексом “0” обозначены расстояния между осями соответствующих концевых шарниров звеньев, длины которых a, b, c .

Для построения такой группы достаточно трех размеров - a, b, c , поэтому степень иррациональности кинематики равна:

$$k = 5 - 3 = 2.$$

Полученные две лишние подвижности компенсируют только две из трех структурных избыточных связей, поэтому группа нормальной структуры и нормальной кинематики не обладает подвижностью. Это свойство подтверждается исследованием степени иррациональности других групп нормальной структуры: для трехповодковой группы число размерных условий, наложенных на взаимное расположение осей кинематических пар, равно 11, из которых шесть линейные (равенство размеров звеньев расстояниям между осями), и на одно меньше - на угловые соотношения (равенство нулю углов между осями шарниров). Таким образом, число условий равно удвоенному числу двухсторонних пар (традиционно называемых низшими) минус единица:

$$y = 2p_n - 1,$$

$$\text{где } p_n = p_3 + p_4 + p_5.$$

Оси односторонних пар (традиционно называемых высшими, так как предполагают наибольшую подвижность соединяемых звеньев), количество которых p_6 , не проходят через точку пересечения осей звеньев, и сами оси звеньев в плоском механизме не пересекаются, поэтому не соблюдается условие равенства нулю углов между осями пар, принадлежащих одному звену. С учетом этого:

$$y = 2p_n - p_6 - 1,$$

$$\text{где } p_6 = p_1 + p_2.$$

Для плоского механизма число размеров z равно исходному, или полному числу размеров кинематической цепи Z_0 , которое независимо от сложности определяется суммой числа монад, образующих данную цепь, и числа размеров, необходимых для определенности положения неподвижных кинематических пар, число которых p_s . По данным Главы 3, число монад определяется по формуле (4.13):

$$m = S + p_0 + 2(2c - 1 + c_0).$$

Число неподвижных размеров находится из условия кинематической определенности, сформулированном в начале Главы 3 для замкнутых контуров с различным числом сторон c_i (см. формулу 3.2):

$$m_i = 2a_i - 3,$$

Так как в данном случае $a_i = p_{s_i}$, полное (исходное) число размеров:

$$Z_0 = m + m_i = S + p_0 + 2(2c - 1 + c_0) + 2p_s - 3,$$

или после преобразований путем подстановки формул (2.1), (2.3) и (3.10):

$$Z_0 = 4p - 3n - 3. \quad (4.3)$$

Для двухзвенной группы $Z_0 = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 3 = 3$, а для трехпроводковой $Z_0 = 4 \cdot 6 - 3 \cdot 4 - 3 = 9$. Дополнительное число размеров для цепей аномальной структуры определяется степенью аномальности структуры конкретного контура, как было показано в Главе 2.

Итак, степень иррациональности кинематики для плоского механизма:

$$k = y - Z_0 = 2p_n - p_6 - 1 - 4p + 3n + 3 = 3n - 2p_n - p_6 + 2. \quad (4.4)$$

Степень иррациональности кинематики плоской трехпроводковой группы:

$$k = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 + 2 = 2.$$

Такой же степенью иррациональности кинематики обладают и другие группы нормальной структуры или так называемые группы Ассур, не обладающие подвижностью. Для шарнирного четырехзвенника и других четырехзвенных механизмов:

$$k = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 2 = 3.$$

В этом случае все три структурные избыточные связи компенсируются кинематическими подвижностями и механизм становится и кинематически определенным, и одновременно подвижным. Разумеется, степень иррациональности кинематики не зависит от степени аномальности кинематики и не изменяется в зависимости от мгновенного положения механизма. По этой причине удастся выразить степень иррациональности кинематики **плоского механизма** через структурные параметры и почленно сложить формулу (4.4) со степенью иррациональности структуры в соответствии с (2.2):

$$\begin{aligned} s + k &= 3n - 3p_5 - 2p_4 - p_3 - p_2 + 3n - 2p_n - p_6 + 2 = \\ &= 6n - 3p_5 - 2p_4 - p_3 - p_2 - 2p_5 - 2p_4 - 2p_3 - p_2 - p_1 + 2 = \\ &= 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 + 2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Данную формулу можно с полным основанием назвать **структурно-кинематической**, учитывая, что при ее составлении использованы условия параллельности осей, поэтому применима она только для плоских механизмов.

Рассмотрим несколько примеров применения структурно-кинематической формулы. Шарнирный четырехзвенник с одной цилиндрической парой:

$$s + k = 6n - 5p_5 - 4p_4 + 2 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 1 + 2 = 1.$$

Шарнирный четырехзвенник с двумя цилиндрическими парами:

$$s + k = 6n - 5p_5 - 4p_4 + 2 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 2 = 2.$$

Лишние подвижности - на сдвиг: одна из них местная (локальная).

Шарнирный четырехзвенник, в котором две из четырех пар заменены сферическими, имеет нормальную структуру и кинематику, а степень

иррациональности структуры $s = 1$, что объясняется, как правило, локальной либо групповой подвижностью, например, вращением шатуна вокруг своей оси. Степень иррациональности по структурно-кинематической формуле:

$$s + k = 6n - 5p_5 - 3p_3 + 2 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 2 = 4.$$

Кроме структурной локальной подвижности, в это число вошли еще три кинематические лишние подвижности: на изгиб, на кручение и на сдвиг всей линии структурно-кинематической цепи. *Лишними данные подвижности являются в том смысле, что в плоском по определению механизме они попросту не используются, то есть не участвуют в движении.* Самоустанавливаемость такого механизма объясняется, таким образом, совместным действием структурных и кинематических условий. В пространственном механизме идентичной структуры эти подвижности не являются лишними, поскольку все они участвуют в движении. *Под самоустанавливаемостью традиционно понимается сохранение работоспособности (подвижности) механизма при деформациях основания (неподвижного звена – стойки), обусловленных различными факторами.*

Трехзвенный механизм простой зубчатой передачи имеет степень иррациональности:

$$s + k = 6n - 5p_5 - 2p_2 + 2 = 6 \cdot 2 - 5 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 2 = 2.$$

Линейный анализ показывает, что лишними подвижностями могут быть неиспользуемые в плоском механизме подвижности на сдвиг и на кручение. Замена линейной высшей пары точечной увеличивает число подвижностей:

$$s + k = 6n - 5p_5 - p_1 + 2 = 6 \cdot 2 - 5 \cdot 2 - 1 + 2 = 3.$$

В данном случае к вышеуказанным подвижностям на сдвиг и кручение добавляется лишняя подвижность на изгиб, который возможен при параллельных осях кинематических пар. Таким образом, самоустанавливаемость кинематической цепи с высшими парами обусловлена *не отсутствием* структурных избыточных связей, а *наложением* кинематических условий на взаимное расположение осей кинематических пар, то есть лишними контурными подвижностями. При произвольном расположении осей вращательных пар в пространстве ось точечной высшей пары самоустанавливается в положение, обеспечивающее лишние подвижности, а ось линейчатой пары должна занимать строго определенное положение, при котором не нарушается линия контакта.

Очевидно, степень аномальности кинематики механизмов нормальной кинематики можно выразить через структурные параметры, но только до тех пор, пока звенья не занимают какие-либо “особые” положения. Количество общих размерных условий равно количеству точек пересечения осей звеньев, то есть количеству кинематических пар на монадном уровне по формуле (3.5):

$$Y = p_m = (3m - p_0 - S)/2.$$

Количество размеров равно исходному числу размеров, определенному также через структурные параметры (4.3):

$$Z_0 = 4p - 3n - 3.$$

После подстановки в (4.1) данные выражения обращают его в тождество, поэтому в таком виде уравнение (выраженное только через структурные параметры) не может использоваться для определения степени аномальности структуры, как и следовало ожидать. Как показано выше, необходимо в каждом конкретном случае составлять обобщающее размерное условие для каждого положения механизма, которое каким-либо образом изменяет количество исходных размерных условий и число размеров, необходимых для построения положения механизма. **Общим случаем размерных условий является функция положения, объединяющая кинематические параметры схемы в зависимость от обобщенной координаты.**

4.2 Графические методы кинематического анализа плоских механизмов

4.2.1 Метод планов

Первая и главная задача кинематики – задача о положениях, которая для плоских механизмов решается различными способами в зависимости от класса механизма. После этого решаются задачи определения скоростей и ускорений точек звеньев, как производные первой.

Механизмы нулевого класса, состоящие из двухзвенных групп – диад – строятся **способом засечек**, если известны размеры всех звеньев. Рассмотрим данный способ на примере шарнирного четырехзвенника $OABC$ (рисунок 4.3, а), для которого заданы в метрах размеры подвижных звеньев l_{OA} , l_{AB} , l_{BC} и неподвижного l_{OC} , а также обобщенная координата φ .

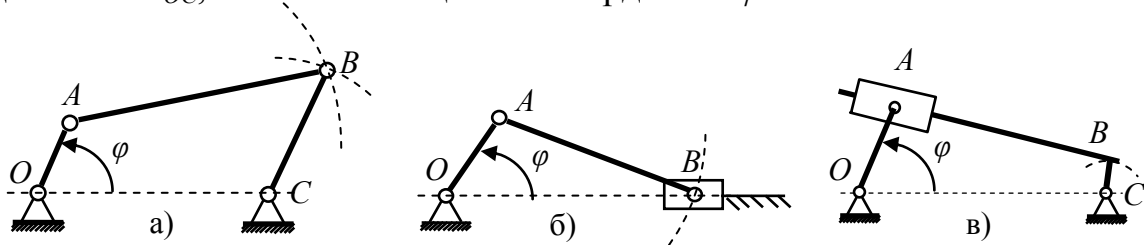


Рисунок 4.3 - Построение плана положения шарнирного четырехзвенника

Построение начинается с начального звена OA , которому приписана обобщенная координата φ , определяющая положение всего механизма в силу его кинематической определенности. Из точки O размер начального звена OA (как правило, кривошипа) в заранее выбранном масштабе откладывается под углом φ к выбранному направлению линии контура. Масштаб построения определяется **масштабным коэффициентом плана положений** μ_l как отношение заданной длины звена l_{OA} в метрах к отрезку, которым это звено изображено на схеме, в миллиметрах:

$$\mu_l = l_{OA}/OA, \text{ м/мм.}$$

Из полученной точки A на конце кривошипа циркулем проводится дуга радиуса AB , равного длине шатуна, а из точки C , которая находится на линии

контура расстояния OC , равном длине стойки, проводится дуга радиуса CB . Точка пересечения двух дуг и есть положение искомой точки B . После этого можно соединить прямыми линиями точки A , B и C . Отрезки AB , BC и OC , изображающие соответствующие звенья длиной l_{AB} , l_{BC} и l_{OC} , определяются путем деления длин звеньев на масштабный коэффициент длин:

$$AB = l_{AB}/\mu_l; \quad BC = l_{BC}/\mu_l; \quad OC = l_{OC}/\mu_l.$$

Построение кривошипно-ползунного механизма (рисунок 4.3, б) начинается также с построения положения начального звена OA , а положение точки B определяется пересечением дуги радиуса AB с направляющей ползуна, которая в общем случае может не проходить через точку O . В *кривошипно-кулисном механизме* (рисунок 4.3, в) точка B совпадает с точкой касания прямой, проведенной через точку A , с дугой радиуса BC , если такой размер не равен нулю и кулиса AB не проходит через точку C .

Шатунные кривые – это траектории различных точек шатунной плоскости, совершающей сложное движение вместе с шатуном. Если построить несколько положений механизма и последовательно соединить плавной линией положения какой-либо точки, расположенной на оси шатуна или просто связанной с шатуном, можно получить шатунную кривую. Шатунные кривые различных точек шатунной плоскости (плоскости, связанной с шатуном), различаются по форме и могут быть использованы для воспроизведения движения рабочих органов, а также дают наглядное представление о характере сложного движения шатуна. Например, сложное движение шатуна кривошипно–ползунного механизма (рисунок 4.4) состоит из вращательного движения точки A и поступательного движения точки B , остальные точки шатунной плоскости имеют различные траектории, причем те из них, которые лежат непосредственно на оси шатуна (M_1 , M_2 , M_3), имеют симметричные шатунные кривые.

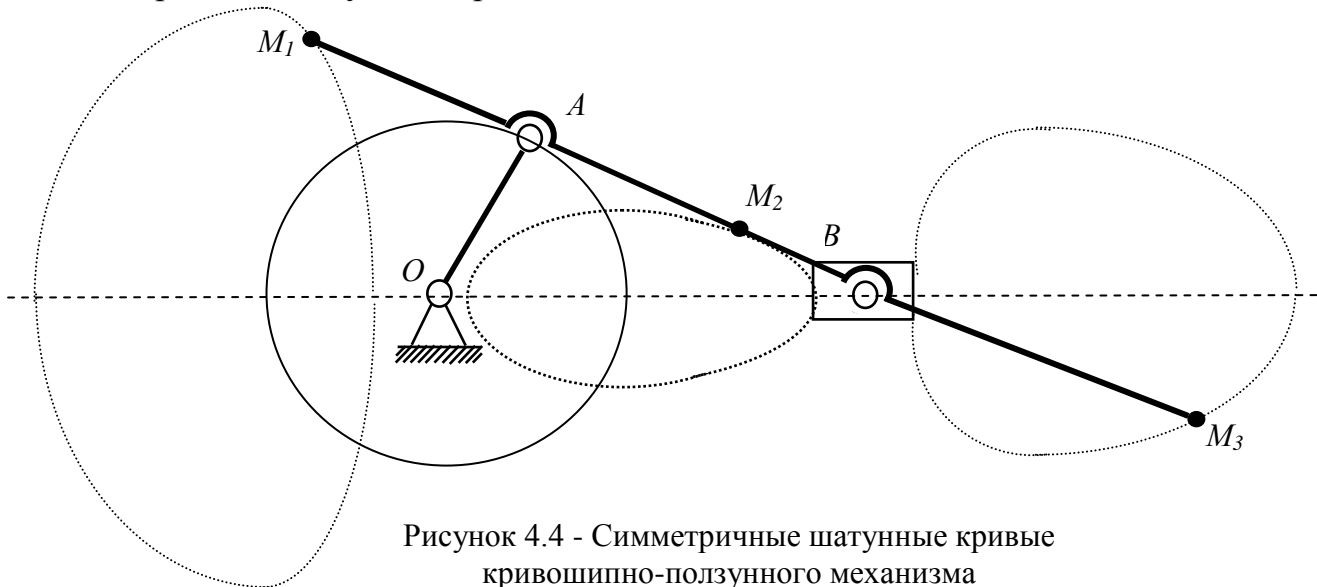


Рисунок 4.4 - Симметричные шатунные кривые кривошипно-ползунного механизма

Скорости точек звеньев механизма в заданном положении определяются путем построения плана скоростей. *Планами скоростей механизма* называются векторные изображения скоростей, соответствующие заданному положению механизма, то есть совокупности плоских пучков, лучи которых изображают абсолютные скорости, а отрезки, соединяющие концы лучей – относительные скорости соответствующих точек. Направления векторов скоростей для точек звеньев, совершающих простое движение, известны: скорости точек вращающихся звеньев касательны их круговым траекториям, то есть перпендикулярны осям этих звеньев, а скорости точек звеньев, совершающих поступательное движение, параллельны их направляющим.

Сложное движение звена (например, шатуна), можно представить как вращение вокруг некоторой точки, называемой **мгновенным центром вращения (МЦВ)**, относительно которого направления векторов скоростей определяется как перпендикуляры к линиям, связывающим сами точки с МЦВ. Таким образом, положение МЦВ определяется на пересечении перпендикуляров к скоростям двух точек звена, если направления этих скоростей известны. Например, для кривошипно-коромыслового механизма (рисунок 4.5, а), для которого скорости точек A и B перпендикулярны звеньям OA и BC , положение МЦВ определяется как точка пересечения линий, продолжающих оси звеньев (точка Π).

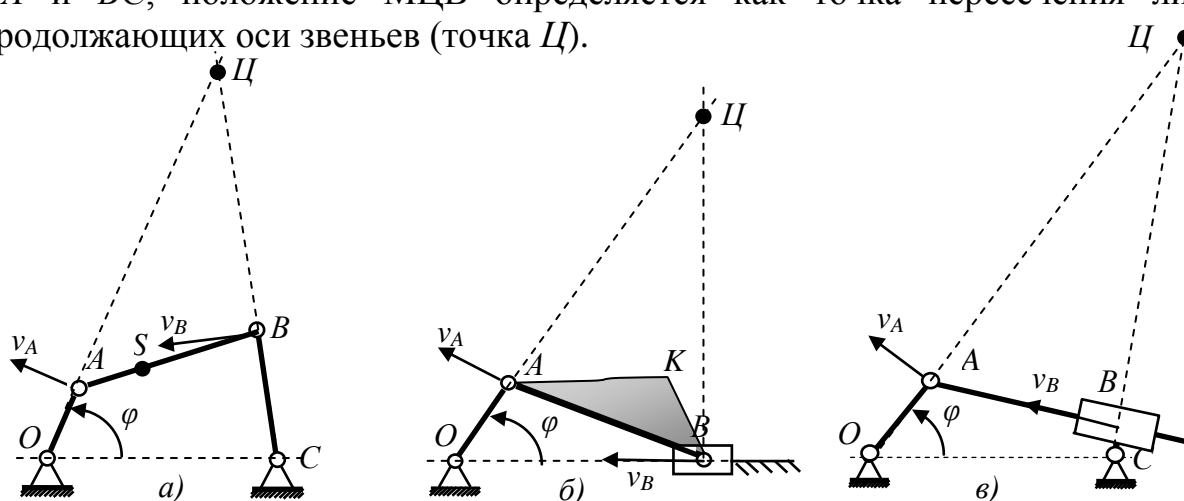


Рисунок 4.5 - Определение положения мгновенного центра вращения

В *кривошипно-ползунном* механизме (рисунок 4.5, б) все точки ползуна движутся параллельно направляющей, поэтому центр вращения при прямолинейно-поступательном движении находится в бесконечности, а перпендикуляр в точке B восстанавливается к направляющей ползуна. *Кривошипно-кулисный* механизм на рисунок 4.5, в показан в другом исполнении, нежели на рисунок 4.3, в, но только для того, чтобы показать направление скорости точки B , которая совпадает с направлением звена AB , даже если размер BC равен нулю. В остальном принцип определения положения МЦВ одинаков для любых исполнений кривошипно-кулисного механизма.

Положение МЦВ на неподвижной плоскости в каждом положении механизма меняется, а геометрическое место МЦВ на неподвижной плоскости называется **неподвижной центроидой**, в отличие от **подвижной центроиды**, которая образуется положениями МЦВ на подвижной плоскости, связанной с шатуном. Форма центроиды (подвижной и неподвижной) различна для разных механизмов. В процессе движения механизма подвижная центроиды, связанная с шатунной плоскостью, огибает без скольжения неподвижную, то есть *обкатывает*. Отсюда следует важное свойство МЦВ, а именно то, что они в любой момент времени совпадают с мгновенными центрами скоростей (МЦС), скорость которых равна нулю в данный момент времени, а скорости других точек шатунной плоскости пропорциональны удалению от МЦС. Таким образом, зная скорость какой-либо точки шатунной плоскости, например, A , и положение МЦС, можно составить пропорцию и определить скорости других точек шатунной плоскости, например, точки B :

$$v_A/v_B = AC/BC;$$

$$v_B = v_A \cdot BC/AC.$$

Построение плана скоростей начинается с выбора произвольной точки p в качестве полюса плана скоростей (рисунок 4.6). В полюсе, как и в МЦС, скорости точек равны нулю, а по мере удаления от него возрастают. Поскольку скорости точек шатунной плоскости пропорциональны удалениям от МЦС, но перпендикулярны им, план скоростей представляет собой фигуру, подобную фигуре ACB , но повернутую на 90 градусов.

Скорость точки A можно определить, если задана угловая скорость вращения кривошипа OA :

$$v_A = \omega_{OA} \cdot l_{OA}.$$

Масштабный коэффициент плана скоростей определяется как отношение этой скорости к длине вектора, которым скорость изображается на плане скоростей:

$$\mu_v = v_A/pa,$$

где pa обычно принимается равным 50-70 мм. Из полюса p вектор длиной pa откладывается в направлении, перпендикулярном звену OA .

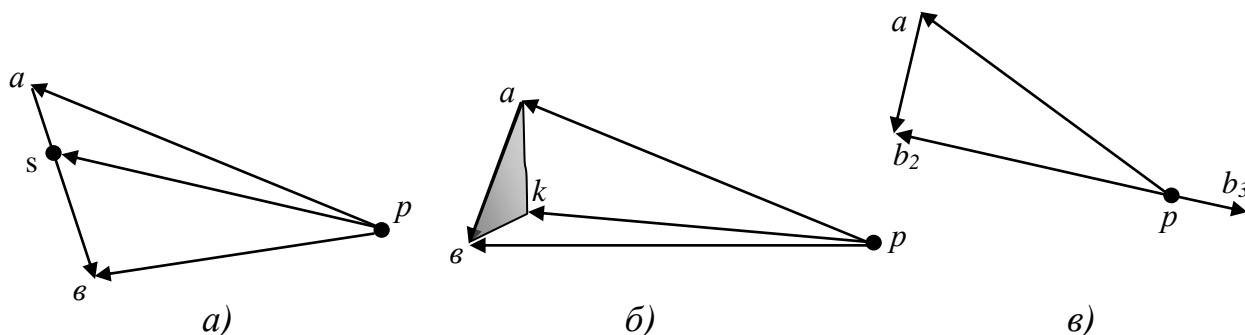


Рисунок 4.6 - Построение планов скоростей для четырехзвенных механизмов

Скорость каждой точки на плане скоростей обозначается соответствующей маленькой буквой. Точка B принадлежит двум звеньям –

звену BC , совершающему возвратно-вращательное движение, и звену AB , совершающему сложное движение. Скорость точки B относительно неподвижной точки C складывается из переносной скорости A и скорости точки B относительно точки A :

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{v}_{BA}.$$

План скоростей представляет собой графическое решение данного векторного уравнения, в котором векторы, известные только по направлению, подчеркнуты одной линией, а вектор, известный и по величине, и по направлению, подчеркнут двумя линиями. Из полюса p проводится линия, перпендикулярная звену BC , а из точки a – линия, перпендикулярная AB . Точка пересечения этих линий и даст искомую точку v , при этом вектор pv изображает абсолютную скорость точки B , а вектор av – относительную скорость точки B относительно точки A .

Аналогично строятся планы скоростей (рисунок 4.6, б, в) для кр4 ошипно-ползунного и кривошипно-кулисного механизмов (рисунок 4.5, б, в). В кривошипно-ползунном механизме (рисунок 4.5, б) скорость точки B направлена параллельно направляющей ползуна (рисунок 4.6, б).

Для определения величин скоростей длины соответствующих векторов на плане скоростей умножаются на масштабный коэффициент плана скоростей:

$$v_B = pb \cdot \mu_v; \quad v_{BA} = ab \cdot \mu_v; \quad v_S = ps \cdot \mu_v; \quad v_{SA} = as \cdot \mu_v.$$

Угловые скорости звеньев AB и BC определяются равенствами:

$$\omega_2 = v_{BA}/l_{AB}; \quad \omega_3 = v_B/l_{BC}.$$

В кривошипно-ползунном механизме $\omega_3 = 0$, так как ползун движется поступательно.

В кривошипно-кулисном механизме скорость точки B направлена вдоль кулисы AB , при этом относительная скорость v_{BA} всегда перпендикулярна ей (рисунок 4.6, в). Полученная точка показывает скорость точки B_2 , принадлежащей звену 2, относительно точки B_3 . Скорость точки B_3 , принадлежащей звену 3, относительно неподвижной точки C в данном положении противоположна по направлению относительной скорости v_{B_2} , а величину v_{B_3} можно определить через равенство угловых скоростей звеньев AB и BC , образующих поступательную пару (их угловые скорости равны, так как отсутствует взаимное вращение):

$$\omega_2 = v_{BA}/l_{AB}; \quad \omega_3 = v_{B_3}/l_{BC},$$

откуда $v_{B_3} = v_{BA} \cdot BC/AB$, или $pb_3 = ab \cdot BC/AB$.

Скорость скольжения шатуна AB в ползуне, то есть относительная скорость $v_{B_2B_3}$ определяется длиной вектора b_2b_3 :

$$v_{B_2B_3} = b_2b_3 \cdot \mu_v.$$

В случае, когда $BC=0$, а точки B_2 , B_3 и C совпадают, $v_{B_3}=0$, а $v_{B_3B_2}=v_{B_2}$.

Скорости других точек, лежащих на осях звеньев, а также не лежащих на осях, но связанных с ними, определяются с помощью известной из теоретической механики теоремы подобия: «Отрезки прямых линий,

соединяющие точки на схеме звена механизма, и отрезки прямых линий, соединяющие концы векторов скоростей этих точек на плане скоростей, образуют подобные и сходственно расположенные фигуры. Фигура на плане скоростей повернута относительно фигуры схемы звена на 90° . Согласно теореме подобия, отрезок as на плане скоростей подобен изображению шатуна на схеме механизма (рисунок 4.5, а), следовательно, положение точки s на векторе относительной скорости определится из соотношения отрезков:

$$as/ab = AS/AB = l_{AS}/l_{AB}.$$

В кривошипно-ползунном механизме (рисунок 4.5, б) точка K жестко связана с шатуном AB , поэтому на плане скоростей она определяется путем построения на векторе av треугольника avk (рисунок 4.6, б) подобного ABK , при этом необходимо соблюдать направление обхода контура треугольника для подобия фигуры $ABЦ$ (рисунок 4.5, б) плану скоростей в целом.

Планами ускорений механизма называются векторные изображения ускорений, соответствующие заданному положению механизма, то есть совокупности плоских пучков, лучи которых изображают абсолютные ускорения, а отрезки, соединяющие концы лучей – относительные ускорения соответствующих точек. Построение плана ускорений подобно построению плана скоростей, но при этом нужно учитывать, что направления ускорений неизвестны, поэтому их необходимо разложить на составляющие. Например, для кривошипно-коромыслового механизма ускорение точки B определяется в соответствии с векторным уравнением, в котором известные и по величине, и по направлению векторы подчеркнуты двойной линией:

$$\underline{\underline{\bar{a}_B^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_B^\tau}} = \underline{\underline{\bar{a}_A}} + \underline{\underline{\bar{a}_{BA}^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_{BA}^\tau}},$$

где: \bar{a}_B^n – нормальная (центростремительная) составляющая ускорения точки B относительно неподвижной точки C , направленная к центру вращения звена 3, то есть к точке C :

$$\bar{a}_B^n = \omega_3^2 l_{BC};$$

\bar{a}_B^τ – тангенциальная (касательная) составляющая ускорения точки B , перпендикулярная звену BC .

\bar{a}_A – ускорение точки A , которое также может быть разложено на нормальное и тангенциальное, но при равномерном вращении звена OA равно центростремительному:

$$\bar{a}_A = \omega_1^2 l_{OA};$$

\bar{a}_{BA}^n – нормальная составляющая относительного ускорения точки B относительно точки A (направлена от точки B к точке A):

$$\bar{a}_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB};$$

\bar{a}_{BA}^τ – тангенциальная составляющая относительного ускорения, перпендикулярная звену AB .

План ускорений является графическим решением векторного уравнения с двумя неизвестными по величине векторами тангенциальных ускорений. Построение начинается с обозначения полюса буквой π . Из полюса откладывается вектор πa , длина которого выбирается произвольно, а направление в соответствии с направлением ускорения a_A (рисунок 4.7, а). Определяется масштабный коэффициент плана ускорений:

$$\mu_a = a_A / \pi a.$$

К данному вектору необходимо прибавить вектор a_{BA}^n , длина которого πn_2 определяется как отношение ускорения к масштабному коэффициенту. Далее из полюса π откладывается вектор a_B^n , длина которого πn_3 также равна отношению соответствующего ускорения к масштабному коэффициенту. Через точки n_2 и n_3 проводятся прямые, перпендикулярные нормальным составляющим, и точка их пересечения дает искомую точку b , которую надо соединить с полюсом и с точкой a . Чтобы определить величины ускорений, необходимо длину соответствующего вектора в мм умножить на масштабный коэффициент, как и в случае с планом скоростей.

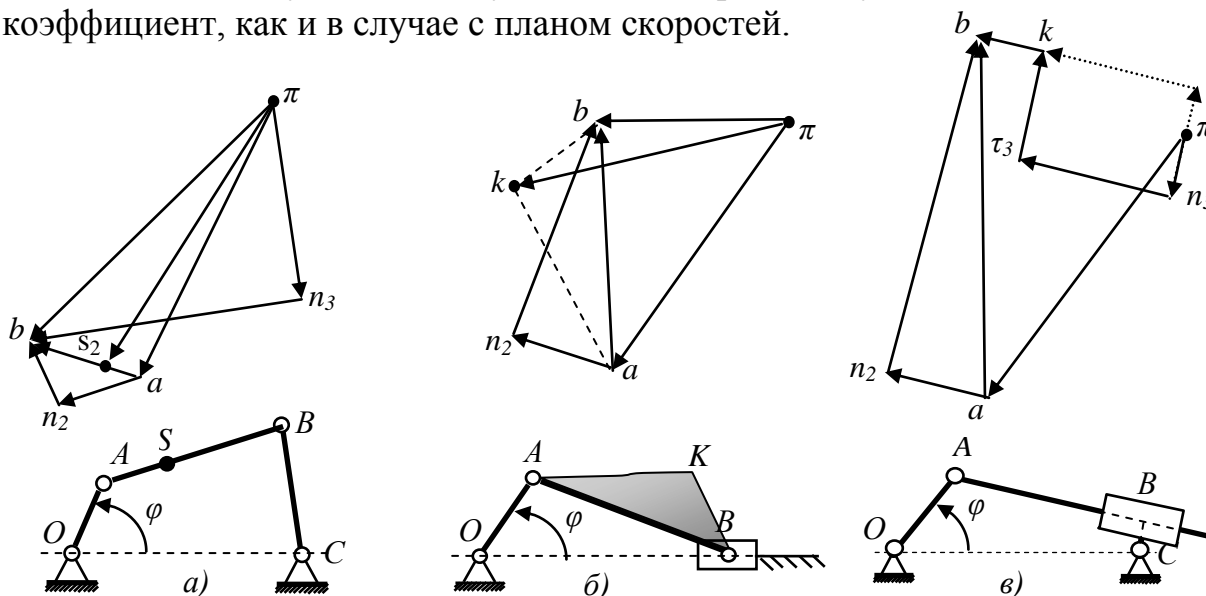


Рисунок 4.7 - Построение планов ускорений для четырехзвенных механизмов

План ускорений кривошипно-ползунного механизма (рисунок 4.7, б) строится в соответствии с векторным уравнением:

$$\underline{\underline{a}}_B^r = \underline{\underline{a}}_A + \underline{\underline{a}}_{BA}^n + \underline{\underline{a}}_{BA}^\tau,$$

где $\underline{\underline{a}}_B^r$ - ускорение скольжения ползуна по неподвижной направляющей, проводится из полюса плана ускорений параллельно направляющей OB . Остальные построения аналогичны предыдущему примеру.

Наибольшую сложность представляет построение плана ускорений кривошипно-кулисного механизма, так как точка B_2 , принадлежащая звену 2, имеет ускорение относительно точки B_3 , принадлежащей звену 3, в отличие от

предыдущих примеров, где обе точки имеют одинаковые ускорения. План ускорений составляется в соответствии с векторным уравнением:

$$\underline{\underline{\overline{a}_{B_3}^n}} + \underline{\underline{\overline{a}_{B_3}^\tau}} + \underline{\underline{\overline{a}_{B_2B_3}^k}} + \underline{\underline{\overline{a}_{B_2B_3}^r}} = \underline{\underline{\overline{a}_A}} + \underline{\underline{\overline{a}_{BA}^n}} + \underline{\underline{\overline{a}_{BA}^\tau}},$$

где: $\overline{a}_{B_3}^n$ - нормальное ускорение точки B_3 , направленное к точке C :

$$\overline{a}_{B_3}^n = \omega_3^2 l_{BC};$$

$\overline{a}_{B_3}^\tau$ - тангенциальное ускорение точки B_3 , перпендикулярное нормальному;

$\overline{a}_{B_2B_3}^k$ - кориолисово ускорение, модуль которого определяется по формуле:

$$\overline{a}_{B_2B_3}^k = 2\omega_3 \cdot v_{B_2B_3},$$

а направление находится поворотом относительной скорости $v_{B_2B_3}$ на 90° по направлению переносной угловой скорости ω_3 ;

$\overline{a}_{B_2B_3}^r$ - ускорение скольжения, параллельное АВ и неизвестное по величине.

Остальные составляющие определяются, как в предыдущих примерах. Однако проблема состоит в том, что векторное уравнение содержит три неизвестных и для его решения необходимо вычислить аналитически одно из тангенциальных ускорений - $\overline{a}_{B_2B_3}^\tau$ или \overline{a}_{BA}^τ , но сделать это невозможно, поскольку неизвестны угловые ускорения ε_2 и ε_3 , равные между собой по величине. Задача решается графически: так как тангенциальное ускорение $\overline{a}_{B_2B_3}^\tau$ совпадает по направлению с ускорением скольжения $\overline{a}_{B_2B_3}^r$, объединяем их в одну линию, в то же время в данном положении противоположны по направлению нормальное и кориолисово ускорения $\overline{a}_{B_2B_3}^k$ (дополнительное построение на рис.4.7, в показано пунктиром). Это означает, что к вектору pn_2 присоединяется вектор кориолисова ускорения и через его конец проводится перпендикуляр до пересечения с перпендикуляром к вектору an_2 в точке b , после чего определяется угловое ускорение:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{\overline{a}_{BA}^\tau}{l_{AB}},$$

а затем модуль тангенциального ускорения:

$$\overline{a}_{B_3}^\tau = \varepsilon_3 \cdot l_{BC}.$$

и длина вектора $n_3\tau_3 = \overline{a}_{B_3}^\tau / \mu_a$.

Построение планов положений механизмов первого класса производится способом **ложных положений**. Поясним это на примере механизма, содержащего трехповодковую группу, для которого известны размеры всех

звеньев и расстояния между неподвижными шарнирами, итого 10 размеров: $r, a, b, c, d, e, f, g, h, i$ (рисунок 4.8, а).

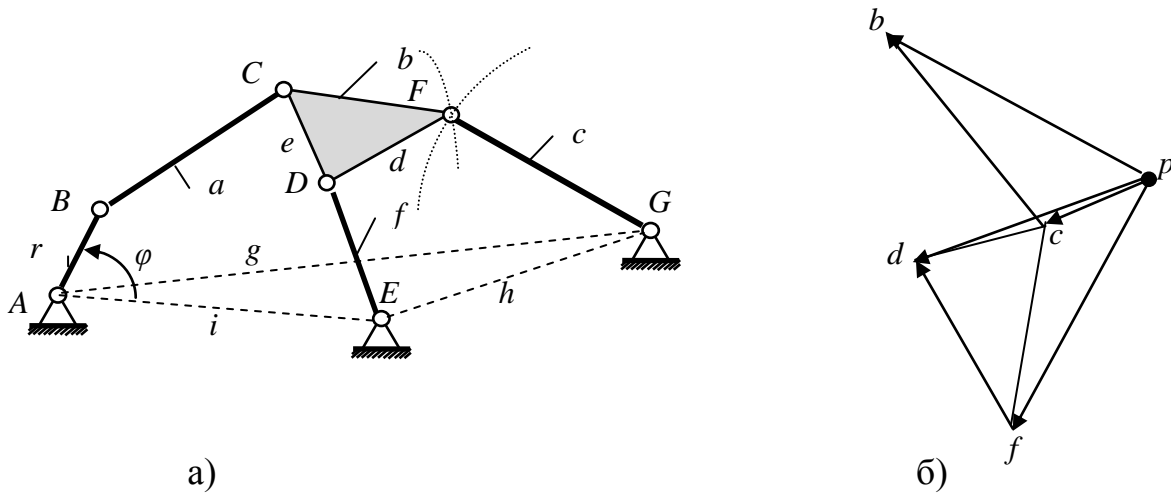


Рисунок 4.8 - Построение плана положения и плана скоростей механизма первого класса

Построение начинается с неподвижного треугольника AGE с размерами g, h, I , затем под углом φ откладывается звено AB длиной r . Из точек B и E проводится дуги размеров a и f соответственно. Сторона подвижного треугольника CD может занимать между этими дугами множество положений, поэтому строится несколько положений размера e : для этого нужно задаться рядом последовательных положений точки C и размером e сделать засечки на дуге радиуса f , проведенной из точки E . Затем достраивается столько же положений треугольника CDF с размерами e, b, d . Положения точки F треугольника CDF соединяются плавной линией, то есть строится шатунная кривая точки F , пересечение которой с дугой радиуса GF размером c и даст искомое положение точки F и всего механизма.

Планы скоростей и ускорений механизма первого класса можно построить с помощью так называемых особых точек Асура. Эти точки находятся на пересечении осей поводков трехповодковой группы, поэтому каждая трехповодковая группа имеет в общем случае три точки Асура. Однако для определения кинематических характеристик достаточно и одной точки Асура, которая используется как промежуточная при построении планов скоростей и ускорений.

План скоростей механизма первого класса с трехповодковой группой (рисунок 4.8, б) можно построить и проще, если начинать построение не с точки A кривошипа, а с выходного звена, например, с точки F , для которой составляется векторное уравнение:

$$\bar{v}_F = \bar{v}_D + \bar{v}_{FD}.$$

Все три скорости, входящие в состав уравнения, неизвестны по величине, но если отложить от полюса p произвольную длину вектора pf ,

перпендикулярного звену FG и направленного в сторону предполагаемого движения точки F , можно графически решить векторное уравнение, в котором вектор pd перпендикулярен звену DE , а вектор fd перпендикулярен звену FD . После этого на векторе fd строится треугольник fdc , подобный FDC и определяется скорость точки C , для которой составляется векторное уравнение:

$$\underline{\underline{\bar{v}_C}} = \underline{\underline{\bar{v}_B}} + \underline{\underline{\bar{v}_{CB}}}.$$

Поскольку скорость точки C известна, определяется положение на плане скоростей точки b , после чего можно определить масштабный коэффициент и модули всех скоростей.

4.2.2 Метод кинематических диаграмм

Кинематическая диаграмма представляет собой графическое изображение изменения одного из кинематических параметров выходного звена: перемещения, скорости или ускорения точки звена в функции времени или перемещения начального звена механизма, то есть в функции обобщенной координаты. Диаграмма перемещения выходного звена строится с использованием способа засечек для ряда положений механизма, достаточно близко отстоящих друг от друга. Полученные значения перемещений откладываются на графике, который и называется *диаграммой перемещений*.

Рассмотрим использование метода кинематических диаграмм применительно к кривошипно-ползунному механизму (рисунок 4.9). Для удобства построений ось направляющей ползуна располагаем вертикально и строим несколько положений механизма, разбив окружность кривошипа, например, на 8 равных частей (в масштабе μ_l). Справа от плана положений располагается график, по горизонтальной оси которого откладывается угол поворота кривошипа (обобщенная координата), а по вертикальной – перемещения ползуна (точки В), причем нулевая точка для удобства совпадает с нулем графика. Полученные точки соединяются плавной кривой, которая и является диаграммой перемещений ползуна. Масштабный коэффициент μ_φ по оси абсцисс определяется как отношение полного оборота кривошипа 2π к длине отрезка l на этой оси, принятого для изображения полного оборота (обычно 100-120 мм):

$$\mu_\varphi = \frac{2\pi}{l}.$$

Диаграмма скоростей ползуна получается путем графического дифференцирования диаграммы перемещений, а диаграмма ускорений – путем графического дифференцирования диаграммы скоростей.

Графическое дифференцирование методом хорд проводится в такой последовательности.

- Диаграмма перемещений разбивается на участки, где каждый участок кривой соединяется хордой;

- На диаграмме скоростей, разбитой на такие же участки, слева от оси ординат выбирается полюс P графического дифференцирования на расстоянии h от начала координат;

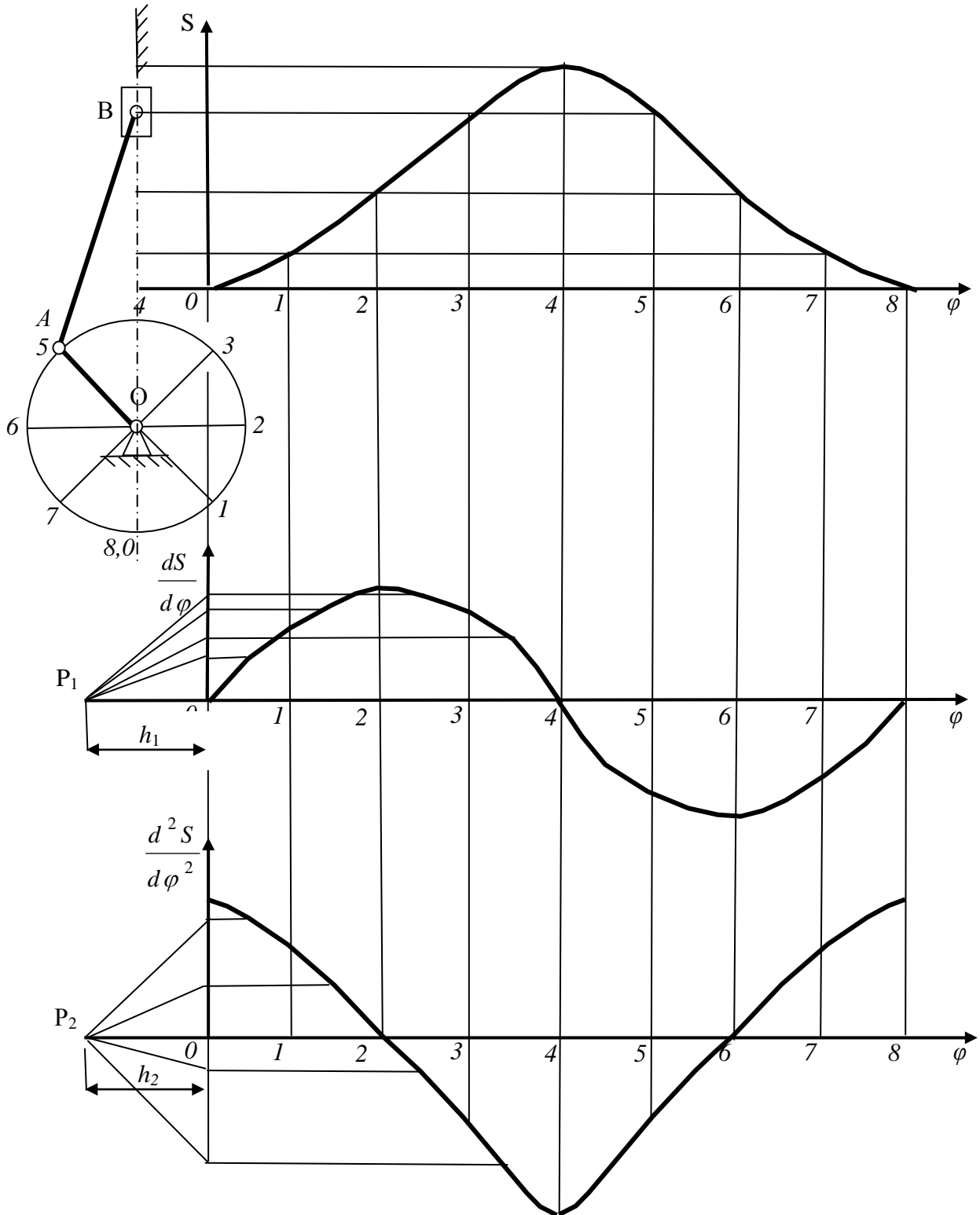


Рисунок 4.9 - Построение кинематических диаграмм.

- Параллельно хордам из полюса Р проводятся лучи, которые отсекут на оси ординат отрезки, пропорциональные аналогам скоростей ползуна в разных положениях;
- Полученные ординаты переносятся в середины соответствующих участков, после чего точки соединяются плавной кривой.

Графическое дифференцирование методом касательных отличается только тем, что вместо хорд на каждом участке проводятся касательные к диаграмме в середине участка. Масштабный коэффициент аналогов скоростей равен:

$$\mu_{\frac{dS}{d\varphi}} = \frac{\mu_1}{\mu_\varphi h_1}.$$

Аналогично производится графическое дифференцирование диаграммы скоростей с целью получения аналогов ускорений. Масштабный коэффициент аналогов ускорений равен:

$$\mu_{\frac{d^2S}{d\varphi^2}} = \frac{\mu_{\frac{dS}{d\varphi}}}{\mu_\varphi h_2}.$$

4.3 Аналитические методы кинематического исследования механизмов

Аналитическое исследование кинематики механизма состоит в определении и дифференцировании *функции положения*, связывающей положения звеньев и точек механизма с *обобщенной координатой*, приписанной *начальному звену*. Обобщенная координата – линейный или угловой размер, определяющий положение начального звена и всех остальных звеньев механизма. Первая производная функции положения называется *аналогом скорости*, вторая – *аналогом ускорения* точки. Аналоги, в отличие от собственно скоростей и ускорений, безразмерны. *Начальное звено*, как правило, совпадает с *входным*, но в некоторых случаях обобщенная координата приписывается другому звену, в частности *выходному*. В любом случае понятие *входного звена* (из раздела «Структура») в кинематике заменено на *начальное звено*. В случае если функция положения связывает положение выходного звена с положением начального, то есть с обобщенной координатой, она называется *передаточной функцией*. Для рычажных механизмов функция положения имеет нелинейный вид, для большинства же огибающих механизмов (например, для зубчатых) она линейна и называется *передаточным отношением*.

Входными параметрами кинематического анализа являются размеры звеньев (линейные и угловые) и обобщенная координата, а *выходными* – функция положения и ее производные.

4.3.1 Метод треугольников

При исследовании схемы механизма методом треугольников она разбивается на треугольники и функция положения определяется с помощью теорем тригонометрии, в частности, теоремы синусов и теоремы косинусов. В простейшем случае схема состоит из одного треугольника, например, схема кривошипно-кулисного (синусного) механизма с поступательной кулисой (рисунок 4.10, а) и схема центрального кривошипно-ползунного механизма (рисунок 4.10, б).

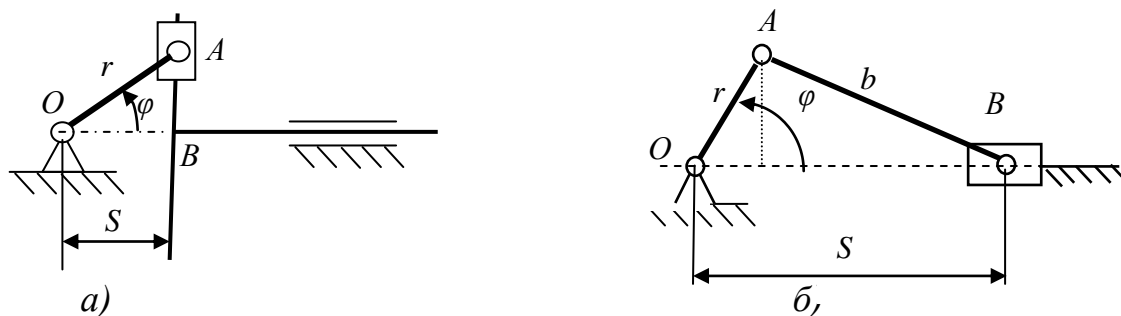


Рисунок 4.10 - Определение передаточной функции методом треугольников

В первом случае треугольник OAB – прямоугольный, поэтому перемещение поступательной кулисы B легко определяется как катет этого треугольника, если задан размер звена AB и угол его поворота – обобщенная координата φ :

$$S = r \cos \varphi .$$

Первая производная полученной передаточной функции есть аналог скорости точки B :

$$\frac{dS}{d\varphi} = r \sin \varphi .$$

Размерность полученной величины – метры, поэтому, чтобы получить непосредственно скорость, необходимо умножить выражение на угловую скорость начального звена, которая также задается:

$$v_B = r \sin \varphi \cdot \omega_1, \text{ м/с}$$

Вторая производная передаточной функции – аналог ускорений, а ускорение точки получается умножением ее на квадрат угловой скорости начального звена:

$$\frac{d^2 S}{d\varphi^2} = -r \cos \varphi$$

$$a_B = r \cos \varphi \cdot \omega_1^2, \text{ м/с}^2$$

Знак минус в выражении второй производной показывает, что в данный момент времени точка B замедляет свое движение, поэтому при определении модуля ускорения минус опущен.

В кривошипно-ползунном механизме (рисунок 4.10, б) перемещение точки B является суммой проекций звеньев OA и AB на ось механизма:

$$S = r \cos \varphi + b \cos \gamma .$$

Угол γ между шатуном AB и осью механизма можно определить по тереме синусов:

$$\frac{r}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \varphi}; \quad \text{откуда } \gamma = \arcsin \frac{r \sin \varphi}{b} .$$

Таким образом, положение точки B определяется функцией:

$$S = r \cos \varphi + b \cos \cdot \arcsin \frac{r \sin \varphi}{b} .$$

Аналоги скоростей и ускорений определяются аналогично предыдущему примеру:

$$\frac{dS}{d\varphi} = -r \sin \varphi - \frac{r^2 \sin \varphi \cos \varphi}{b \sqrt{1 - \left(\frac{r \sin \varphi}{b}\right)^2}},$$

$$\frac{d^2 S}{d\varphi^2} = -r \cos \varphi - \frac{br^2 \cos 2\varphi \sqrt{1 - \left(\frac{r \sin \varphi}{b}\right)^2} + \frac{1}{4} r^4 \sin^2 2\varphi}{b^2 \left(1 - \frac{r \sin \varphi}{b}\right)^2} .$$

4.3.2 Метод замкнутого векторного контура

Наиболее универсальным является метод замкнутого векторного контура, предложенный В.А. Зиновьевым. Каждая замкнутая кинематическая цепь, абстрактно представленная в виде многоугольника, подчиняется *условию замкнутости*, вследствие чего суммы проекций сторон многоугольника на суммы проекций сторон многоугольника схемы на оси прямоугольной системы координат равны нулю.

Рассмотрим его применение на примере шарнирного четырехзвенника, или кривошипно-коромыслового механизма (рисунок 4.11, а). Звенья представляются в виде векторов, длина которых обозначена r_i , а углы наклона векторов обозначены φ_i , при этом векторы образуют замкнутый контур и расположены последовательно с соблюдением направления обхода векторного контура, а все углы откладываются в положительном направлении от оси X .

После этого составляются уравнения проекций векторов на оси координат, начало которых совмещено для удобства с точкой O :

$$r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2 + r_3 \cos \varphi_3 + r_4 \cos \varphi_4 = 0$$

$$r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2 + r_3 \sin \varphi_3 + r_4 \sin \varphi_4 = 0$$

Полученная система уравнений содержит два неизвестных (φ_2, φ_3), относительно которых решается с учетом того, что $\varphi_4 = 180^\circ$, а φ_1 задается как обобщенная координата. Для этого из первого уравнения выражается, например, φ_2 и подставляется во второе уравнение, которое решается относительно φ_3 , после чего определяется и φ_2 .

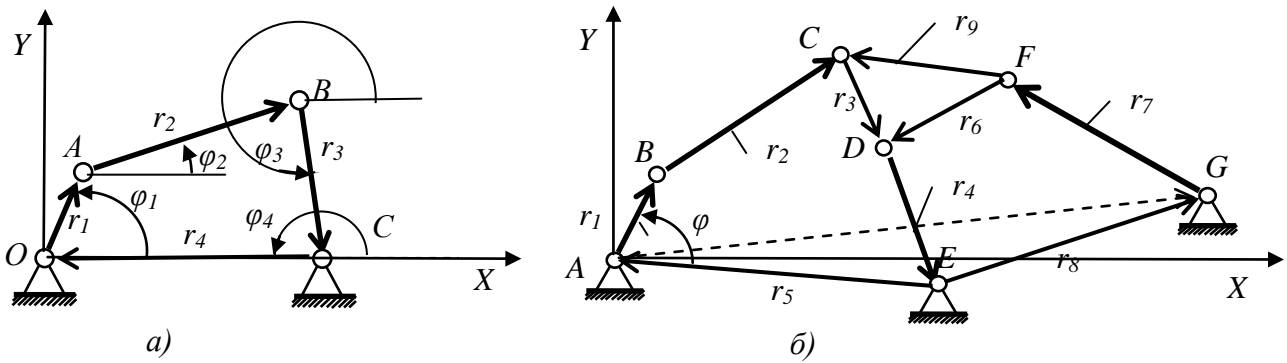


Рисунок 4.11 - Определение функции положения методом В.А. Зиновьева

Если кинематическая схема содержит два контура нулевого класса, то для второго контура составляется другая система двух уравнений проекций, которая решается относительно неизвестных величин после того, определены параметры первого контура.

Механизмы первого класса нормальной структуры содержат как минимум два контура, в одном из которых $S=1$, в другом $S=-1$, как в механизме с трехповодковой группой (рисунок 4.11, б, на рисунке углы условно не показаны). В этом случае уравнения проекций первого контура содержат три неизвестных ($\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$) с учетом того, что $\varphi_5 = \text{const.}$:

$$r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2 + r_3 \cos \varphi_3 + r_4 \cos \varphi_4 + r_5 \cos \varphi_5 = 0$$

$$r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2 + r_3 \sin \varphi_3 + r_4 \sin \varphi_4 + r_5 \sin \varphi_5 = 0$$

Во втором контуре новых неизвестных два угла (φ_6, φ_7), а $\varphi_8 = \text{const.}$:

$$r_4 \cos \varphi_4 + r_6 \cos \varphi_6 + r_7 \cos \varphi_7 + r_8 \cos \varphi_8 = 0$$

$$r_4 \sin \varphi_4 + r_6 \sin \varphi_6 + r_7 \sin \varphi_7 + r_8 \sin \varphi_8 = 0$$

Строго говоря, имеется еще один контур, образованный звеньями r_3, r_6 и r_9 , но это контур неподвижный, поэтому угол φ_6 определяется как разность угла φ_3 и постоянного угла между векторами r_3 и r_6 , который известен либо определяется из треугольника CDF с тремя известными сторонами. Таким образом, можно записать еще одно равенство:

$$\varphi_6 = \varphi_3 - \angle \bar{r}_3 \bar{r}_6.$$

Полученная система из пяти уравнений содержит в сумме пять неизвестных и решается совместно в отличие от предыдущего примера, где

каждый контур нулевого класса решался самостоятельно относительно двух неизвестных. В этом коренное отличие в кинематическом исследовании механизмов нулевого и первого классов. Механизмы более высоких классов нормальной структуры содержат соответственное число контуров и пар уравнений проекций, решаемых совместно.

4.3.3 Кинематический анализ рычажно-оггибающих механизмов со сложным оггибающим движением исполнительного органа

В настоящее время для развития машиностроения практическое значение имеют кривошипные механизмы *нового класса*, в которых дуга окружности оггибает неподвижную прямую или, реже, дугу окружности. Это и уже известные и используемые в металлургии ножницы катящегося реза, колебательно-ковочные машины и шагающие устройства. Исследования показали перспективность подобных механизмов практически во всех отраслях машиностроения, где они могут использоваться как в составе технологического оборудования в процессах, связанных с обработкой материалов давлением, так и в качестве изделий, выпускаемых промышленностью. Рассмотрим общий случай такого оггибания, когда дуга окружности радиуса R , связанная с шатуном рычажного механизма, оггибает в своем движении неподвижную прямую. В этом случае центр кривизны дуги (точка M) движется по параллельной прямой со скоростью, равной скорости точки контакта дуги и прямой, то есть мгновенного центра вращения. Такой подход позволяет определить основные параметры прямолинейно-оггибающего механизма через параметры прямолинейно-направляющего, если центром кривизны дуги считать направляющую точку M . Например, перемещение, скорость и ускорение точки контакта K равны соответствующим характеристикам направляющей точки M , длина участка оггибания равна прямолинейному участку траектории точки M , отклонение во взаимном оггибании дуги и прямой равно отклонению направляющей точки M от заданной прямой. Дополнительная характеристика, специфичная для оггибающего механизма - скольжение между дугой и прямой - также определяется как разность между перемещением точки M и длиной оггибающей дуги за это же время. Таким образом, прямолинейно-оггибающий механизм, созданный на основе точного или приближенного прямолинейно-направляющего, может быть также точным или приближенным. Точный оггибающий механизм, как и точный направляющий, имеет в сравнении с приближенным большее количество подвижных звеньев и кинематических пар, что отрицательно сказывается на его точности и надежности. Исключение составляет точное эллиптическое прямоило, на основе которого может быть создан точный прямолинейно-оггибающий механизм, но применение его ограничено из-за мертвых положений. Кроме того, даже в случае точного оггибающего механизма простая схема не может обеспечить точного скольжения, которое в общем случае также достигается приближенно. Рассмотрим для примера прямолинейно-оггибающий механизм, выполненный

на основе приближенного эллиптического прямилла. Шатунная кривая этого механизма является симметричной, поэтому для удобства совместим ее прямолинейный участок с осью ординат (рисунок 4.11), а ось симметрии с осью абсцисс.

Из направляющей точки M проводим дуги радиусов R_1 , R_2 , и R_3 . В своем движении они огибают вертикальные прямые, абсциссы которых x_1 , x_2 и x_3 равны R_1 , R_2 и R_3 соответственно. Длина огибаемого отрезка каждой прямой равна длине прямолинейного участка траектории точки M :

$$L = 2(r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2).$$

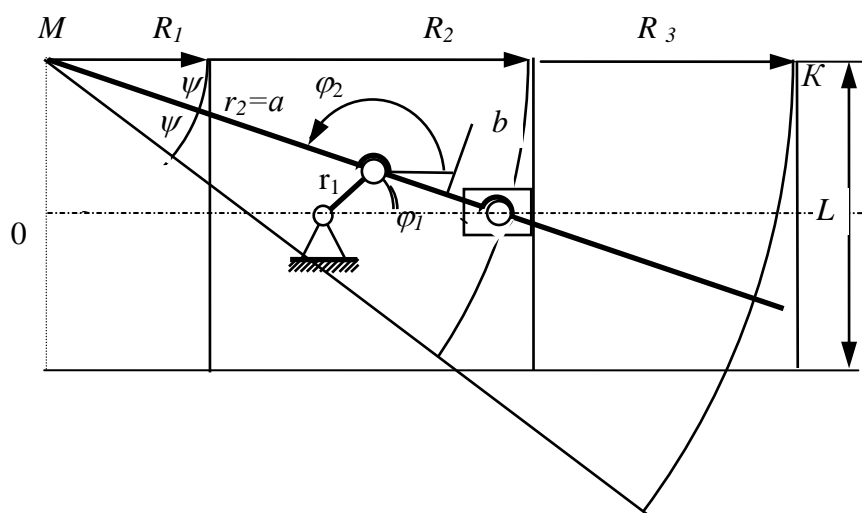


Рисунок 4.11 - Прямолинейно-огibaющий механизм на основе эллиптического прямилла

Длина огибаемого отрезка дуги:

$$l = R \cdot \psi, \text{ где } \psi = 2(\pi - \varphi_2).$$

Скольжение между взаимогобгаемыми отрезками дуги и прямой:

$$C = L - l = r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2 + R(\pi - \varphi_2).$$

Для эллиптического прямилла, или кривошипно-ползунного механизма, функция положения $\varphi_2 = \pi - \arcsin(r_1 \sin \varphi_1 / b)$. Для других симметричных прямолинейно-огibaющих механизмов подставляются соответствующие функции положения. На рисунок 4.11 дуга радиуса R_2 соответствует минимальному скольжению, а дуги радиусов R_1 и R_3 имеют скольжение в процессе огibaния неподвижной прямой, причем дуга радиуса R_1 скользит вперед, а дуга радиуса R_3 - назад. Практическое значение может иметь каждый из этих трех случаев скольжения в зависимости от назначения механизма.

В роли прямолинейно-огibaющего может использоваться, таким образом, любой прямолинейно-направляющий механизм, как рычажный, так и зубчато-рычажный. Разнообразие схем позволяет выявить наилучший вариант для каждого конкретного случая использования.